DERIVADAS.
APLICACIONES DE LA DERIVADA

DERIVADAS

1. INTRODUCCIÓN

El concepto se derivada se aplica en los casos donde es necesario medir la rapidez con que se produce el cambio de una situación. Por ello es una herramienta de cálculo fundamental en los estudios de Física, Química y Biología. También en las ciencias sociales como la Economía y la Sociología se utiliza el análisis matemático para explicar la rapidez de cambio en las magnitudes que les son propias.

Conocer la variación de una función en un intervalo grande no informa suficientemente bien en el sentido de entender cómo se produce dicha variación. Se necesita estudiar variaciones de la función en intervalos cada vez más pequeños para llegar a entender el concepto de variación instantánea o referida a un punto, es decir el de derivada en un punto.

Un hallazgo importante en el estudio de la derivada de una función es que la pendiente o inclinación de la recta tangente a la curva en un punto representa la rapidez de cambio instantáneo. Así pues, cuanto mayor es la inclinación de la recta tangente en un punto, mayor es la rapidez de cambio del valor de la función en las proximidades del punto.

El concepto de derivada segunda de una función - derivada de la derivada de una función- también se aplica para saber si la rapidez de cambio se mantiene, aumenta o disminuye. Así el concepto de convexidad y concavidad -aspectos geométricos o de forma- de una función están relacionados con el valor de la derivada segunda.

La derivabilidad de una función en un punto (propiedad relativa a la existencia de tangente en un punto) está asociada al de continuidad. Este aspecto también será tratado en esta unidad.

Finalmente veremos la relación que tiene la derivada con los problemas de optimización de funciones. Estos problemas decimos que son de máximo o de mínimo (máximo rendimiento, mínimo coste, máximo beneficio, mínima aceleración, mínima distancia, etc.).

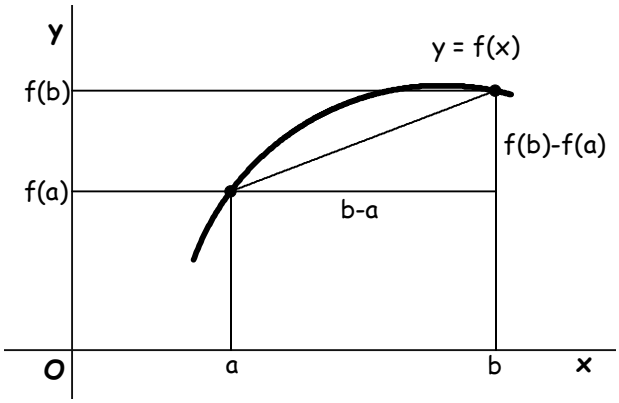
El concepto de derivada lo podemos encontrar en la actualidad en prácticamente cualquier ciencia. La derivada, junto con la práctica totalidad del cálculo infinitesimal básico, fue inventada prácticamente al mismo tiempo, aunque de manera independiente, por Newton y Leibniz.

2. TASA DE VARIACIÓN MEDIA

☺ La **tasa de variación media** de la función $y = f(x)$ en el intervalo **[a,b]** es el cociente entre la variación de la función f(x) y la variación de la variable **x** en el intervalo. Lo indicamos por **TVM[a,b]**.

$$\boxed{TVM[a,b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

☞ **Interpretación geométrica**:



✐ **RESUELVE**

Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = x^2 - 2x$ en el intervalo [1,4].

3. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

☺ La **derivada** de la función $y = f(x)$ en el punto **x** = x_0 es el límite, si existe y es finito, de las tasas de variación media, $TVM[a, a+h]$ cuando $h \to 0$. Se representa por $f'(a)$ y es:

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{ó} \quad f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

☞ La **derivada** también se llama **tasa de variación instantánea** y nos da la medida del crecimiento instantáneo de una función en un punto.

✐ **RESUELVE**

1º- Halla, aplicando la definición, las derivadas de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x) = x^2 - 2x$ en $x = 1$. b) $g(x) = \frac{1}{x}$ en $x = 2$. c) $h(x) = -3x + 1$ en $x = -1$.

Solución:

a) $f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 - 2(1+h) - (1^2 - 2\cdot 1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1^2 + h^2 + 2h - 2 - 2h - (-1)}{h} =$

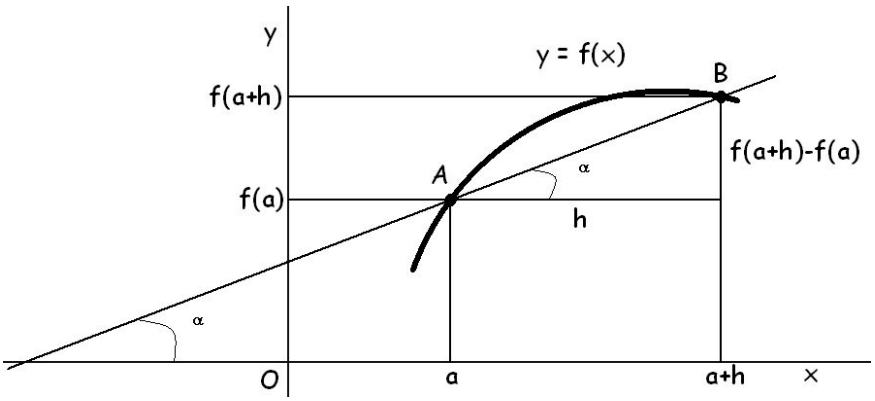
$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0 \Rightarrow f'(1) = 0$

b) Se hace por el mismo procedimiento que el anterior: $g'(2) = \frac{-1}{4}$; c) $h(x) = -3$.

4. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

En la siguiente figura se ha representado la **gráfica** de una función f y la **recta secante** a ella que pasa por los puntos de abscisa **x = a** y **x = a + h**.

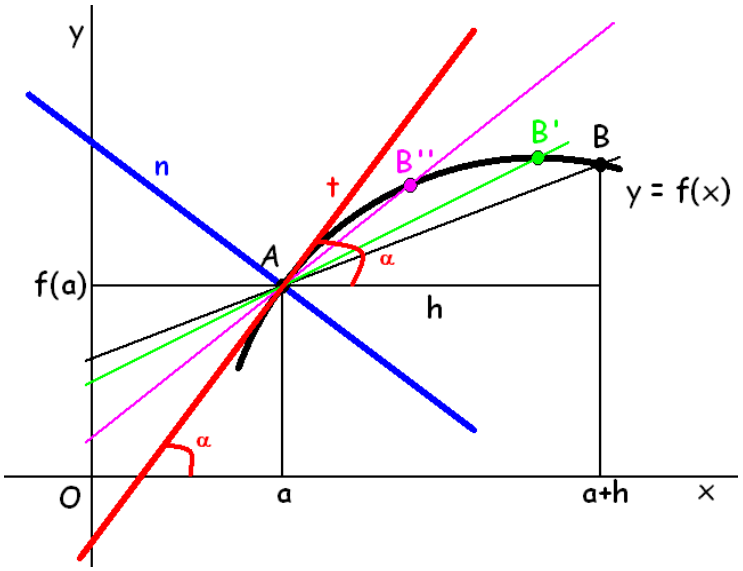
El cociente $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, como hemos visto anteriormente, se llama **tasa de variación media de f en** el intervalo **[a, a + h]** y es la **tangente** del ángulo α, que la recta secante forma con el semieje positivo de X, esto es, la **pendiente** de la **recta secante** a la gráfica de f que pasa por los puntos A y B.



$$TVM[a,a+h]=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=tg\alpha=\text{pendiente de la recta secante}$$

Como se observa en la gráfica siguiente, al hacer que **h tienda a cero**, el punto **B** va tomando posiciones **B'**, **B''**,... cada vez más cercanas a **A** y, en el límite, ambos coincidirán. En tal caso la recta secante pasa a ser **recta tangente a la curva en el punto A**.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=tg\alpha=\text{pendiente de la recta tangente}$$



☞ La **derivada** de una función **f en** un punto **x=a** es la **pendiente** de la **recta tangente** a la curva en ese punto.

$$f'(a)=m_{\text{recta tangente}} \text{ en el punto } (a,f(a))$$

5. ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE Y NORMAL A UNA CURVA EN UN PUNTO

☞ Para hallar la **ecuación de la recta t, tangente a la curva** $y=f(x)$ **en** el punto $A(a,f(a))$, aplicamos la ecuación punto pendiente de la recta:

$$t \equiv y - y_0 = m(x - x_0) \text{ donde } x_0 = a,\ y_0 = f(a) \text{ y } m = f'(a).$$

Sustituyendo estos datos en la ecuación anterior, obtenemos:

$$\boxed{y - f(a) = f'(a)(x - a)}$$

☺ Se llama **recta normal de una curva en un punto**, a la recta perpendicular a la tangente en dicho punto.

Si **m** es la **pendiente** de la recta **tangente** y **m'** la **pendiente** de la recta **normal**, se debe verificar lo siguiente:

$$t \perp n \Leftrightarrow m \cdot m' = -1 \Rightarrow m' = \frac{-1}{m} \Rightarrow m' = \frac{-1}{f'(a)}$$

☞ Por lo anterior, la **ecuación de la recta normal** (perpendicular a la tangente en el punto de tangencia) tendrá por ecuación:

$$\boxed{n: y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x - a)}$$

✐ **RESUELVE**

1º- Halla la ecuación de la recta tangente y normal a las siguientes curvas en los puntos que se indican:

a) $f(x) = x^2 - 2x$ en $x = 1$. b) $h(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$ en $x = 4$.

Solución:

a) Ecuación de la tangente: y + 1 = 0, ecuación de la normal: x - 1 = 0;

b) $t: y - \frac{4}{5} = \frac{9}{125}(x - 4)$, n: $y - \frac{4}{5} = \frac{-125}{9}(x - 4)$.

6. DERIVADAS LATERALES

☺ Se llama **derivada por la izquierda** de f en x = a, $f'(a^-)$, a:

$$\boxed{f'(a^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

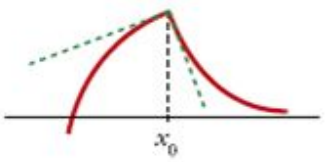
☺ Se llama **derivada por la derecha** de f en x = a, $f'(a^+)$, a:

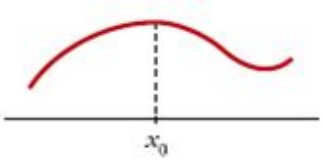
$$\boxed{f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

☞ La **condición necesaria y suficiente** para que una **función sea derivable en** un punto de abscisa **x=a** es que **existan** las **derivadas laterales y** que **sean iguales.**

$$\boxed{\exists f'(a) \Leftrightarrow \begin{cases} 1^{\circ}) \ \exists\, f'(a^-) \text{ y } \exists\, f'(a^+) \\ 2^{\circ}) \ f'(a^-) = f'(a^+) \end{cases}}$$

☞ Si las dos derivadas laterales en un punto de una función existen y no coinciden, se debe a que la curva tiene en ese punto un cambio brusco de pendiente y recibe el nombre de **punto anguloso o pico**.





PUNTO ANGULOSO: $f'(x_0^-) \neq f'(x_0^+)$ FUNCIÓN DERIVABLE: $f'(x_0^-) = f'(x_0^+) = f'(x_0)$

✐ **RESUELVE**

1º- Dibuja la curva y estudia la derivabilidad de la función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 2 \\ 3x - 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ en el punto de abscisa $x_0 = 2$.

2º- Dibuja las curvas y estudia la derivabilidad de las siguientes funciones en x = 0.

a) $f(x) = x \cdot |x|$

b) $g(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

Ayuda:

☞ Las funciones con valor absoluto hay que transformarlas en funciones a trozos antes de derivarlas. Así en la función del ejercicio a): $f(x) = x \cdot |x| = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

☞ Por ser funciones definidas a trozos (están definidas de forma diferente a la izquierda y a la derecha de x = 0), se estudian sus derivadas laterales para saber si existe la derivada en dicho punto.

Soluciones:

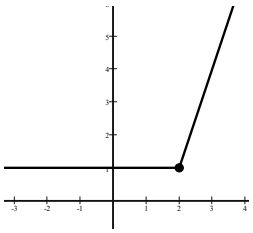
1º- Calculamos la derivada por la izquierda:

$$f'(2^-) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1-1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0;$$

calculamos la derivada por la derecha:

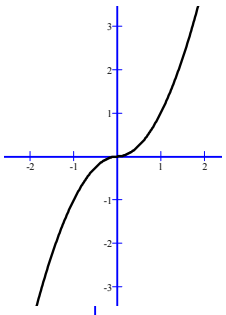
$$f'(2^+) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(2+h) - 5 - (3 \cdot 2 - 5)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{6 + 3h - 5 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3h}{h} = \lim_{h \to 0} 3 = 3$$

No coinciden las derivadas laterales entonces no existe la derivada en el punto de abscisa 2.

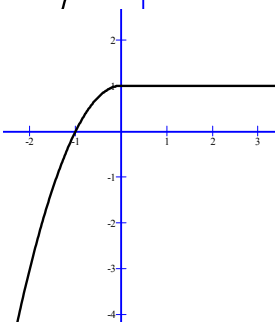


2º-

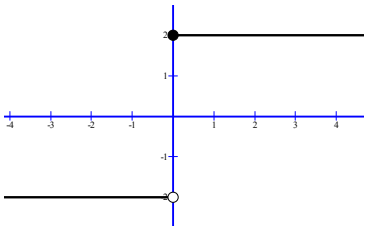
a) Es derivable en x = 0 y su derivada es: $f'(0) = 0$



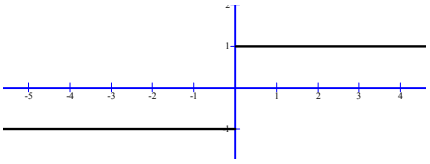
b) Es derivable en x = 0 y su derivada es: $g'(0) = 0$



c) f no es continua en x=0 $\Rightarrow$ f no es derivable en $x = 0$.



d) $\nexists\ f(0) \Rightarrow$ No es derivable en $x = 0$.



7. FUNCIÓN DERIVADA

☺ La **función derivada de una función f** dada es una función que asocia a cada x, donde la función es derivable, su derivada f'(x):

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \to f'(x) \qquad\qquad f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

✐ **RESUELVE**

1º- Aplicando la definición, calcula las siguientes funciones derivadas:

a) $f(x) = x^3$ b) $g(x) = \sqrt{x}$

Solución:

a) $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h\to 0} \left(3x^2 + 3xh + h^2\right) = 3x^2$$

b) Siguiendo el mismo procedimiento que en a), tenemos que: $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

CÁLCULO DE DERIVADAS

PROPIEDADES FUNDAMENTALES	
FUNCIONES	**DERIVADAS**
$h(x)=f(x)+g(x)$	$h'(x)=f'(x)+g'(x)$
$h(x)=f(x)-g(x)$	$h'(x)=f'(x)-g'(x)$
$g(x)=kf(x), k\in\mathbb{R}$	$g'(x)=k\cdot f'(x)$
$h(x)=f(x)\cdot g(x)$	$h'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
$h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$h'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$
Función compuesta $h(x)=fog(x)=f(g(x))$	**Regla de la cadena** $h'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$

REGLAS DE DERIVACIÓN	
$f(x)=k, k\in\mathbb{R}$	$f'(x)=0$
$f(x)=x$	$f'(x)=1$
$f(x)=kx, k\in\mathbb{R}$	$f'(x)=k$
$f(x)=x^n, n\in\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$
$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$	$f'(x)=a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x)=\sqrt[n]{x}$	$f'(x)=\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$f(x)=a^x$	$f'(x)=a^x\cdot\ln a$
$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$

$f(x)=\log_a x$	$f'(x)=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln a}$
$f(x)=\ln x$	$f'(x)=\frac{1}{x}$
$f(x)=\operatorname{sen}x$	$f'(x)=\cos x$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\operatorname{sen}x$
$f(x)=\operatorname{tg}x$	$f'(x)=1+\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$
$f(x)=\operatorname{cosec}x$	$f'(x)=\frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}=-\cos x\cdot\operatorname{cosec}^2 x=-\operatorname{cosec}x\cdot\operatorname{ctg}x$
$f(x)=\sec x$	$f'(x)=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos^2 x}=\operatorname{sen}x\cdot\sec^2 x=\sec x\cdot\operatorname{tg}x$
$f(x)=\operatorname{ctg}x$	$f'(x)=-\left(1+\operatorname{ctg}^2 x\right)=\frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}=-\operatorname{cosec}^2 x$
$f(x)=\operatorname{arcsen}x$	$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x)=\arccos x$	$f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x)=\operatorname{arctg}x$	$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$
$f(x)=\operatorname{arcctg}x$	$f'(x)=\frac{-1}{1+x^2}$

✐ DEMOSTRACIÓN ALGUNAS DE LAS FÓRMULAS DE DERIVACIÓN

a. De una función constante: $f(x)=k\,,\,k\in\mathbb{R}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0\Rightarrow f'(x)=0$$

b. De la función identidad: $f(x) = x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = \lim_{h\to 0}1 = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f'(x) = 1$$

c. Del producto de una constante por una función: $f(x) = kx\ ,k \in \mathbb{R}$

$$h'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{kf(x+h)-kf(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{k\cdot\left[f(x+h)-f(x)\right]}{h} =$$

$$= k\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = k\cdot f'(x) \Rightarrow h'(x) = k\cdot f'(x)$$

d. De la suma de dos funciones: $h(x) = f(x) + g(x)$

$$h'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\left[f(x+h)+g(x+h)\right]-\left[f(x)+g(x)\right]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)+g'(x)$$

e. De la diferencia de dos funciones: $h(x) = f(x) - g(x)$

$$\left[f(x)-g(x)\right]' = \left[f(x)+(-1)g(x)\right]' = f'(x)+\left[(-1)g(x)\right]' =$$

$$= f'(x)+(-1)g'(x) = f'(x)-g'(x)$$

f. De un producto: $h(x) = f(x)\cdot g(x)$

$$\left[f(x)\cdot g(x)\right]' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x+h) + f(x)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} g(x+h)\cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + f(x)\cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} g(x+h)\cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} f(x)\cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \underset{\substack{\lim_{h\to 0} g(x+h)=g(x) \\ \text{ya que } g \text{ es continua en } x}}{=}$$

$$= g(x)\cdot f'(x) + g'(x)\cdot f(x)$$

8. DERIVADAS SUCESIVAS

A partir de la función derivada primera se puede definir, si existe, también su derivada, y recibe el nombre de **derivada segunda**.

La derivada segunda se designa por $f''(x) = (f')'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$.

Análogamente se definen las funciones derivadas tercera, cuarta, quinta, ..., **n-ésima**, que se designan por $f'''(x)$, $f^{(IV)}(x)$, $f^{(V)}(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$.

En algunas funciones es fácil obtener una ley de recurrencia que nos permita calcular la derivada sucesiva de cualquier orden una vez conocidas las primeras derivadas y utilizando el principio de inducción.

Principio de inducción

El método de inducción consta de tres pasos:

Paso 1) Comprobación de que la fórmula vale para n = 1, 2, ...

Paso 2) Hipótesis de inducción, que consiste en suponer que es cierta para n.

Paso 3) Utilizando los pasos anteriores y todos los conocimientos que tengamos de matemáticas, lo probamos para el caso siguiente **n+1**.

✐ RESUELVE

1º- Obtén la derivada n-ésima de las siguientes funciones:

a) $y = e^{2x}$ b) $y = \frac{1}{x}$ c) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Ayuda: Calcula las primeras derivadas: $y', y'', y''', \ldots$, hasta que puedas intuir el valor de $y^{(n)}$. Después hay que hacer la demostración por inducción.

Solución:

b) $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$, $y' = -1 \cdot x^{-2}$, $y'' = -1 \cdot (-2) \cdot x^{-3}$, $y''' = -1 \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot x^{-4}$,

$y^{(IV)} = -1 \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot x^{-5}, \ldots$

Lo anterior lo podemos escribir de la siguiente manera:

$y' = (-1)^1 \cdot 1! \cdot x^{-2}$, $y'' = (-1)^2 \cdot 2! \cdot x^{-3}$, $y^{(III)} = \cdot (-1)^3 \cdot 3! \cdot x^{-4}$, $y^{(IV)} = \cdot (-1)^4 \cdot 4! \cdot x^{-5}, \ldots,$

$y^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \cdot x^{-(n+1)}$

Aplicamos el método de inducción para probar nuestra fórmula:

Paso 1) Comprobamos para n = 1 $\Rightarrow y' = (-1)^1 \cdot 1! \cdot x^{-2}$.

Paso 2) Aceptamos la hipótesis de inducción $y^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \cdot x^{-(n+1)}$.

Paso 3) Probamos que se verifica para el caso siguiente, n+1, para ello derivamos la igualdad anterior

$\left(y^{(n)}\right)' = \left((-1)^n \cdot n! \cdot x^{-(n+1)}\right)' \Rightarrow y^{(n+1)} = (-1)^n \cdot n! \cdot \left(-(n+1)\right) \cdot x^{-(n+1)-1} \Rightarrow y^{(n+1)} = (-1)^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot x^{-(n+2)}$

a) Siguiendo los pasos anteriores obtendremos: $y^{(n)} = 2^n e^{2x}$. c) $f^{(n)}(x) = 0$.

9. DERIVABILIDAD Y CONTINUIDAD

TEOREMA: Si una función es derivable en un punto, necesariamente es continua en él, es decir:

$$f(x) \text{ es derivable en } x = a \Rightarrow f(x) \text{ es continua en } x = a$$

Demostración:

Como f es derivable en x = a, $\exists\, f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ y el valor de la misma es un número real.

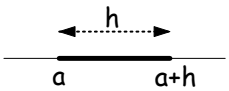
Observa que: $f(a+h)-f(a) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot h$

Tomando límites para $h \to 0$ en los dos miembros

$$\lim_{h\to 0}\left[f(a+h)-f(a)\right] = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot \lim_{h\to 0} h = f'(a)\cdot 0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\left[f(a+h)-f(a)\right] = 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$$

Llamando a + h = x, si $h \to 0 \Rightarrow x \to a$



$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a) \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a) \Rightarrow$ f es continua en x=a. *q.e.d. (c.q.d)*

☞ ***"Quod erat demonstrandum"*** es una locución latina que significa "lo que se quería demostrar" y se abrevia ***"Q.E.D."***. Otra posibilidad es la de finalizar las demostraciones con "c.q.d." (como queríamos demostrar / como queda demostrado).

<u>Ley de los contrarrecíprocos</u>: $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \Rightarrow \neg p$, ($\neg$ no)

☞ **(**Si **f** es **derivable** en **x=a** $\Rightarrow$ **f** es **continua** en **x=a)** $\Leftrightarrow$ **(**Si **f no** es **continua** en **x=a** $\Rightarrow$ **f no** es **derivable** en **x=a)**

Según lo visto anteriormente el teorema anterior es equivalente a este otro:

TEOREMA: Si una función no es continua en un punto tampoco es derivable en dicho punto.

$$f(x) \text{ no es continua en } x = a \;\Rightarrow\; f(x) \text{ no es derivable en } x = a$$

☞ **Observación:** La afirmación reciproca del primer teorema no es cierta, es decir:

$$f \text{ continua } \not\Rightarrow f \text{ derivable}$$

Ejemplo de una función que es continua en un punto y sin embargo no es derivable en el mismo:

Estudia la continuidad y derivabilidad de las función $f(x)=|x|$ en $x = 0$.

Solución:

✐ Estudio de la continuidad en x =0 de $f(x)=|x|=\begin{cases}-x & \text{si } x<0\\ x & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

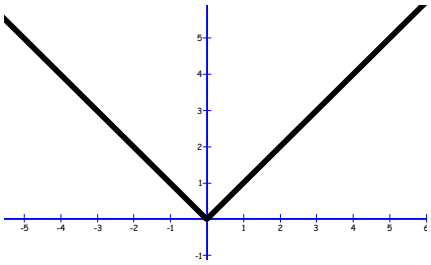
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} -x=0\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x=0\\ f(0)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=f(0)\Rightarrow f \text{ es continua en } x=0$$

✐ Estudio de la derivabilidad en $x = 0$ de $f(x)=|x|=\begin{cases}-x & \text{si } x<0\\ x & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\left\{\begin{array}{l} f'(0^-)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-h-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-h}{h}=-1\\ \\ f'(0^+)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h}{h}=1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ no es derivable en $x=0$

✐ **Gráfica de la función:** Observa la continuidad de la gráfica



✐ **RESUELVE**

1º- Estudia la continuidad y derivabilidad de la función siguiente en x = 0: $y = \sqrt[3]{x}$.

2º- Estudia la continuidad y derivabilidad de la función siguiente en x = 1:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

3º- Estudia la continuidad y derivabilidad de la función definida del siguiente modo:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 3x + 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

Solución: Resuélvelos siguiendo el procedimiento del ejemplo anterior.

1º- y es continua en x=0 y no es derivable en x = 0.

2º- f es continua y derivable en x = 1.

3º- f es continua y derivable en x=0, f no es continua en x=1, entonces no es derivable en x=1. Luego f es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$.

10. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN A TROZOS

Sea $F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \leq a \\ g(x) & \text{si } x > a \end{cases}$ y queremos calcular $F'(a)$, es decir, la función está definida a trozos y queremos hallar la derivada en un punto que está entre dos de los trozos.

✐ <u>Seguiremos el siguiente procedimiento</u>:

1. Estudiamos la continuidad de $F(x)$ en x=a. Si no es continua, no será derivable. Pero si es continua pasamos a 2.
2. Hallamos la función derivada: $F'(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{si } x < a \\ g'(x) & \text{si } x > a \end{cases}$. Si puede ser hallada sólo nos queda calcular $F'(a)$.

3. Para calcular $F'(a)$ hacemos lo siguiente:

a) $\left.\begin{array}{l} F'(a^-) = \lim\limits_{x\to a^-} f'(x) \\ F'(a^+) = \lim\limits_{x\to a^+} g'(x) \end{array}\right\}$ si existen y coinciden, ese es el valor de $F'(a)$

b) Si $F'(a^-) \neq F'(a^+) \Rightarrow \nexists\ F'(a)$

☞ En el hipotético caso de que no exista $F'(a^-)$ o $F'(a^+)$ no podemos asegurar si existe $F'(a)$ y para saberlo tendremos que aplicar la definición de derivada.

Ejemplos:

1º- Estudia la derivabilidad de $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ \text{sen}x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ en x = 0.

Solución:

1. Estudiamos la continuidad de f en el punto x=0

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \Rightarrow f \text{ es continua en } x = 0$$

2. Hallamos la función derivada

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ \cos x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

3. Ahora vamos a calcular la derivada en el punto x = 0

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-} (2x) = 0 \\ f'(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} \cos x = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists\ f'(0)$$

2º- Dada la función $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$. Estudia si es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

Solución:

a) Estudiamos la continuidad de f.

Si $x < 0 \Rightarrow f(x) = e^{-x}$, función **exponencial**, continua en $\mathbb{R}$ y, por tanto también en $(-\infty, 0)$.

Si $x > 0 \Rightarrow f(x) = 1 - x$, función **polinómica**, continua en $\mathbb{R}$ y, por tanto también en $(0, +\infty)$.

Para ser continua en $x = 0$ debe verificarse:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = e^{-0} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1 - 0 = 1 \\ f(0) = e^{-0} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ es continua en } x = 0$$

b) Estudiamos la derivabilidad de f.

Si $x \neq 0$, la derivada de f vale: $f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

En $x = 0$, buscamos si existe la derivada de f

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(-e^{-x}\right) = -1 \\ f'(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} (-1) = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0) = -1$$

Luego f es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

✐ **RESUELVE**

1º- Estudia la derivabilidad de $g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ en x = 0.

2º- Estudia la continuidad y derivabilidad de $f(x) = \left|x^2 - 4\right|$ en $\mathbb{R}$.

3º- Halla el valor que ha de tener **m** para que la función f(x) sea derivable en **x=1**.

$$f(x)=\begin{cases} 3-mx^2 & \text{si } x\le 1 \\ \dfrac{2}{mx} & \text{si } x>1 \end{cases}$$

4º- Halla **a** y **b** para que la función f(x) sea continua: $f(x)=\begin{cases} a & \text{si} \quad x<0 \\ ax+b & \text{si} \quad 0\le x<1 \\ 4x & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}$

Para los valores de **a** y **b** obtenidos, estudia la derivabilidad de f.

5º- Calcula **m** y **n** para que la siguiente función sea derivable en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3x+m & x\le -1 \\ x^2-nx & x>-1 \end{cases}$$

Solución:
1º- La función g es continua y derivable en $x = 0$.
2º- La función f es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{-2,2\}$.
3º- Solución: m = 1
4º- a=2 y b=2. F es derivable en $\mathbb{R}-\{0,1\}$
5º- m=0 y n= -3

11. DERIVACIÓN EN FORMA IMPLÍCITA

A veces es difícil e incluso puede ser imposible "despejar la y" en la función o curva que se va a derivar. Entonces se deriva miembro a miembro utilizando la regla de la cadena.

Ejemplo:

Halla la derivada de $x^2 + y^2 = 1$: $2x + 2yy' = 0$; $y=\dfrac{-2x}{2y}=-\dfrac{-x}{y}$

Para obtener el valor de la derivada en un punto concreto, debemos conocer las coordenadas de dicho punto. Para conocer y' en $(0,1)$ tendríamos $y'=\dfrac{-0}{1}=0$.

✐ **RESUELVE**

1º- Obtén la siguiente derivada implícita y después halla su valor en el punto (1,0).

$$x^2+y^2-2x-4y+1=0$$

Solución: $2x+2yy'-2-4y'=0$. En el punto (1, 0), $y'=0$.

12. USO DE LOS LOGARITMOS EN LA DERIVACIÓN

Si tenemos que derivar una función logarítmica, ahorraremos muchas operaciones aplicando las propiedades de los logaritmos.

1. $\ln(A\cdot B)=\ln A+\ln B$
2. $\ln\left(\frac{A}{B}\right)=\ln A-\ln B$
3. $\ln\left(A^n\right)=n\cdot\ln A$
4. $\ln\left(\sqrt[n]{A}\right)=\frac{1}{n}\cdot A$

Ejemplo:

Aplicando logaritmos, calcula la derivada de la siguiente función: $y=\ln\sqrt[3]{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}$

Solución:

Desarrollamos el logaritmo del segundo miembro

$$y=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2=\frac{1}{3}\cdot 2\cdot\ln\frac{1+x}{1-x}=\frac{2}{3}\left[\ln(1+x)-\ln(1-x)\right]$$

Derivamos la expresión anterior

$$y'=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}\cdot(-1)\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{1-x^2}=$$

$$=\frac{4}{3\left(1-x^2\right)}$$

✐ RESUELVE

1º- Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=\ln\sqrt[4]{x+5}$ b) $y=x^{senx}$ c) $y=\ln\sqrt{\frac{1+senx}{1-senx}}$

Soluciones:

a) $y=\frac{1}{4(x+5)}$; b) $y=\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{senx}{x}\right)\cdot x^{senx}$; c) $y=\frac{1}{\cos x}$

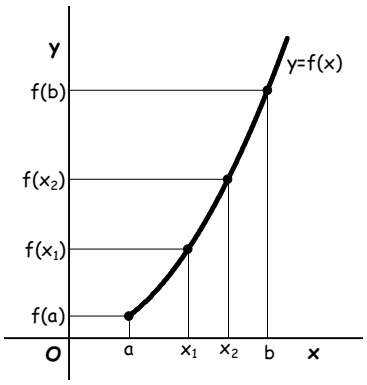
APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

1. CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN

☺ **Función creciente en un intervalo abierto (a,b):**

Una función es **creciente en un intervalo (a,b)** si para todos los pares de puntos $x_1, x_2 \in (a,b)$, tales que $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$.

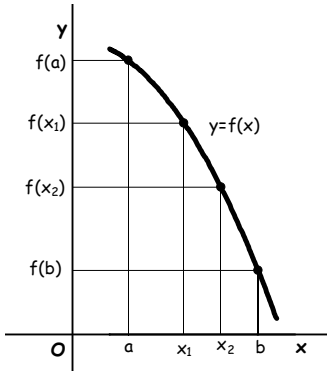
Simbólicamente: f es creciente en $(a,b) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall\ x_1, x_2 \in (a,b),\ \text{si } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$



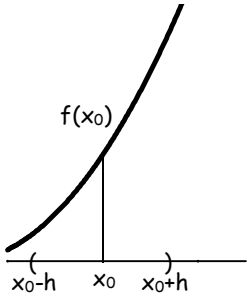
☺ **Función decreciente en un intervalo abierto (a,b):**

Una función es **decreciente en un intervalo (a,b)** si para todos los pares de puntos $x_1, x_2 \in (a,b)$, tales que $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_1) > f(x_2)$.

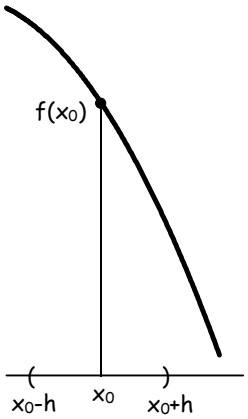
Simbólicamente: f es decreciente en $(a,b) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall\ x_1, x_2 \in (a,b),\ \text{si } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$



☺ f es **creciente en un punto x_0** $\Leftrightarrow$ existe un entorno de x_0, donde f es creciente, es decir, una función f es creciente en un punto x_0, si **existe** un intervalo centrado en x_0, **$(x_0-h,\ x_0+h)$** para el que la **función es creciente**.



☺ **f es decreciente en un punto x_0** $\Leftrightarrow$ existe un entorno de x_0, donde f es decreciente, es decir, una función f es decreciente en un punto x_0, si **existe** un intervalo centrado en x_0, **$(x_0-h,\ x_0+h)$** para el que la **función es decreciente**.

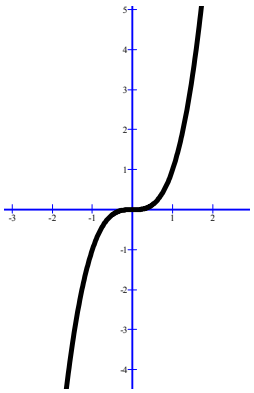


Relación del crecimiento de una función y su derivada

TEOREMA 1

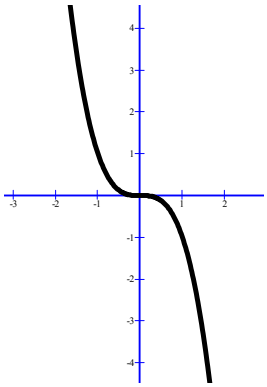
- f es derivable y creciente en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$
- f es derivable y decreciente en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0$

A continuación vamos a ver tres funciones cuyas derivadas son nulas en x = 0:



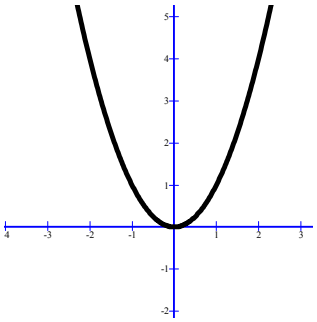
$f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2,\ f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$



$f(x) = -x^3$

$f'(x) = -3x^2,\ f'(0) = -3 \cdot 0^2 = 0$



$f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x,\ f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$

y, sin embargo, la primera es estrictamente creciente en x = 0; la segunda es estrictamente decreciente en x = 0 y la tercera no es ninguna de las dos cosas anteriores en x = 0.

☞ **Observa** que si la función tiene derivada nula en un punto, x_0, $f'(x_0) = 0$, o tangente horizontal en x_0, no podemos afirmar nada sobre el crecimiento y decrecimiento.

Criterio para identificar tramos crecientes o decrecientes a partir del signo de la derivada

TEOREMA 2

$f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ es creciente en x_0

$f'(x_0) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente en x_0

Como consecuencia del teorema anterior, para determinar los intervalos en que la función es creciente o decreciente, tenemos que estudiar el signo de la primera derivada. Para ello:

1. Se calcula el dominio y los puntos de discontinuidad.

2. Se calcula la primera derivada de f(x) y se resuelve la ecuación que se obtiene de igualarla a cero.

3. Se divide el dominio de definición de la función en intervalos abiertos que tienen por extremos los ceros de la primera derivada y los puntos de discontinuidad.

4. Se estudia el signo de la primera derivada en cada uno de esos intervalos (dentro de cada intervalo el signo de la primera derivada es el mismo).

5. Donde la derivada tenga signo positivo la función es creciente $(\nearrow)$ y donde tenga signo negativo la función es decreciente $(\searrow)$.

Ejemplo:

Estudia la **monotonía** (crecimiento y decrecimiento) de la función $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x}$.

Solución:

1. Calculamos el dominio y los puntos de discontinuidad.

$$x^2+2x=0 \Leftrightarrow x(x+2)=0 \Leftrightarrow x=0,\ x=-2 \ \Rightarrow\ \mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{-2,0\}$$

2. Hallamos los ceros de la primera derivada: $f'(x)=\dfrac{-(2x+2)}{(x^2+2x)^2}$

Si $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{-(2x+2)}{(x^2+2x)^2}=0 \Rightarrow -(2x+2)=0 \Rightarrow x=-1$

3. Ordenamos los puntos donde la derivada es cero y donde la función no está definida: $-2<-1<0$

Construimos la siguiente tabla:

valores de x	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,0)$	$(0,+\infty)$
signo de $f'(x)$				
crecimiento				

Estudiamos el signo de la derivada en cada intervalo tomando un único valor del mismo y hallando el signo de f' en dicho valor (el signo de la 1ª derivada es igual en todo el intervalo):

En $(-\infty,-2)$, signo de f' es: $f'(-3)=\dfrac{-2\cdot(-3)-2}{\left((-3)^2+2\cdot(-3)\right)^2}=\dfrac{+}{+}=+$ (positivo)

En $(-2,-1)$, signo de f' es: $f'(-1'5)=\dfrac{-2\cdot(-1'5)-2}{\left((-1'5)^2+2\cdot(-1'5)\right)^2}=\dfrac{+}{+}=+$ (positivo)

En $(-1,0)$, signo de f' es: $f'(-0'5)=\dfrac{-2\cdot(-0'5)-2}{\left((-0'5)^2+2\cdot(-0'5)\right)^2}=\dfrac{-}{+}=-$ (negativo)

En $(0,+\infty)$, signo de f' es: $f'(1)=\dfrac{-2\cdot 1-2}{\left(1^2+2\cdot 1\right)^2}=\dfrac{-}{+}=-$ (negativo)

La tabla quedaría de la siguiente manera:

valores de x	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,0)$	$(0,+\infty)$
signo de $f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$
crecimiento	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

Conclusión: **f crece en** $(-\infty,-2)\cup(-2,-1)$ **y decrece en** $(-1,0)\cup(0,+\infty)$.

✐ **RESUELVE**

Estudia la monotonía (crecimiento y decrecimiento) de las siguientes funciones:

a) $f(x)=2x+1$ b) $y=\dfrac{x}{x-1}$ c) $g(x)=|x-1|$

Solución:

a) f crece en $\mathbb{R}$; b) f decrece en $\mathbb{R}-\{1\}$; c) f decrece en $(-\infty,1)$ y crece en $(1,+\infty)$.

2. EXTREMOS RELATIVOS

☺ **Definición de máximo relativo:**

Una función f tiene en x_0 un **máximo relativo** $\Leftrightarrow$ **existe un intervalo centrado en x_0,** (x_0-h, x_0+h), tal que $\forall\ x \in (x_0-h, x_0+h)$, $f(x) < f(x_0)$.

☞ $f(x_0)$ es el mayor valor de la función en dicho entorno.

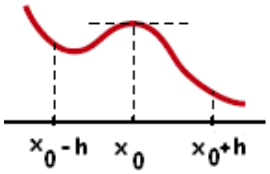
☞ Decir que f tiene un máximo relativo en $x_0 \Leftrightarrow$ f crece a la izquierda de x_0 y f decrece a la derecha de x_0.

☺ **Definición de mínimo relativo**

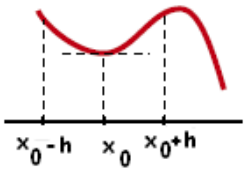
Una función f tiene en x_0 un **mínimo relativo** $\Leftrightarrow$ si existe **un intervalo centrado en x_0,** (x_0-h, x_0+h), tal que $\forall\ x \in (x_0-h, x_0+h)$, $f(x) > f(x_0)$.

☞ $f(x_0)$ es el menor valor de la función en dicho entorno.

☞ Decir que f tiene un mínimo relativo en $x_0 \Leftrightarrow$ f decrece a la izquierda de x_0 y f crece a la derecha de x_0.



MÁXIMO RELATIVO



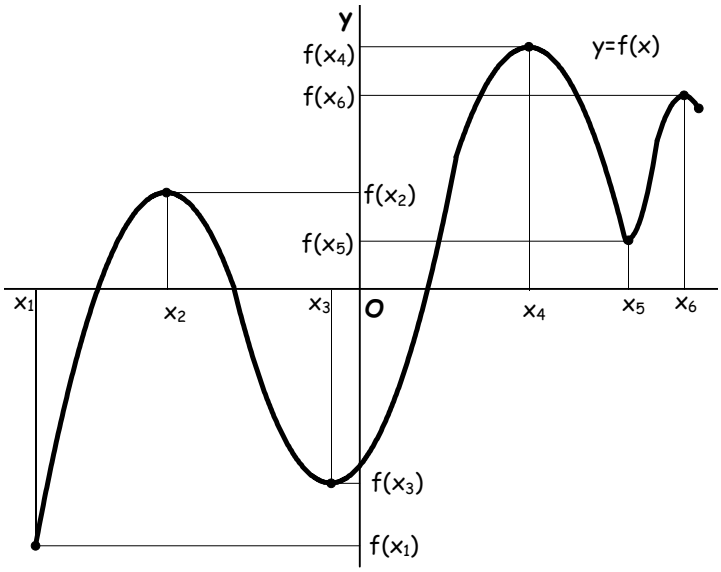
MÍNIMO RELATIVO

☞ Observa que utilizamos el término **relativo** porque estamos estudiando puntos cuyas imágenes son mayores o menores que las de su entorno, pero éstas no tienen por qué corresponder con los valores mayores o menores que la función alcanza en todo su dominio, en cuyo caso utilizaríamos el término **absoluto**.

☺ Una función f tiene un **máximo absoluto en** un punto x_0 si para cualquier valor x del dominio de la función se cumple que $f(x) < f(x_0)$.

☺ Una función f tiene un **mínimo absoluto en** un punto x_0 si para cualquier valor x del dominio de la función se cumple que $f(x) > f(x_0)$.

Ejemplo:



Máximos relativos: x_2, x_4, x_6 Mínimos relativos: x_3, x_5

Máximo absoluto: x_4 Mínimo absoluto: x_1

☞ Los puntos **máximos** o **mínimos relativos** se llaman también **máximos** o **mínimos locales**, **extremos relativos.**

☞ Los puntos x_0 donde la derivada **$f'(x_0)$ se anula** se llaman **puntos singulares**.

☞ Por **punto crítico** se entiende: un punto singular, un punto donde no exista la derivada o un punto extremo **a** ó **b** del dominio [a,b] de definición de la función.

TEOREMA

f tiene un **máximo relativo** en $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1^{\circ})\ f'(x_0) = 0 \\ 2^{\circ})\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$

Demostración:

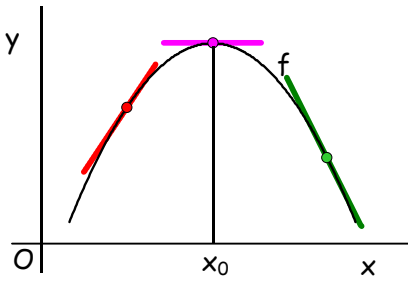
Condición necesaria ($\Rightarrow$)

Como f tiene un máximo en x_0, entonces f crece a la izquierda de x_0 y f decrece a la izquierda de x_0.

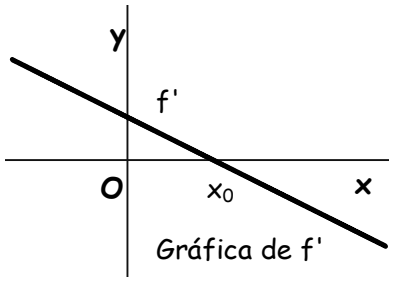
Si f crece a la izquierda de $x_0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$.

Si f decrece a la derecha de $x_0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0$.

Como f es derivable en x_0, la derivada por la izquierda y por la derecha tienen que coincidir: $f'(x_0^-) = f'(x_0^+) = f'(x_0) = 0$.



Gráfica de f



Gráfica de f'

f' a la izquierda de x_0 es positiva, en x_0 es cero y a la derecha de x_0 es negativa por tanto f' es estrictamente decreciente en x_0, luego $f''(x_0) < 0$.

Condición suficiente ($\Leftarrow$)

$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h) - \overbrace{f'(x_0)}^{0}}{h} \Rightarrow f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h)}{h}$, como f' es continua en x_0, por ser derivable en x_0, $\frac{f'(x_0+h)}{h} < 0$

Si $h < 0$, $x_0 + h < x_0$, como $\frac{f'(x_0+h)}{h} < 0 \Rightarrow f'(x_0+h) > 0 \Rightarrow$ f crece a la izquierda de x_0.

Si $h > 0$, $x_0 < x_0 + h$, como $\dfrac{f'(x_0+h)}{h} < 0 \Rightarrow f'(x_0+h) < 0 \Rightarrow$ f decrece a la derecha de x_0.

Como f crece a la izquierda de x_0 y decrece a la derecha de x_0, f tiene un máximo en x_0. *c.q.d.*

☞ Observa que en un máximo o un mínimo relativo, cuando la función es derivable, la recta tangente en ese punto es horizontal $(m = f'(x_0) = 0)$.

TEOREMA

f tiene un **mínimo relativo** en $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1^{\circ})\ f'(x_0) = 0 \\ 2^{\circ})\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$

Demostración: ejercicio.

Procedimiento para hallar los máximos y mínimos relativos

Primer procedimiento

1. Calculamos la primera derivada, $f'(x)$.
2. Resolvemos la ecuación, $f'(x) = 0$. Supongamos que las soluciones son: x_0 y x_1.
3. Hallamos la segunda derivada, $f''(x)$.
4. Sustituimos en $f''(x)$ los valores x_0 y x_1 (posibles máximos y mínimos).

☞ Si al sustituir x_0 el resultado es negativo: $f''(x_0) < 0$, el punto $(x_0, f(x_0))$ es un máximo.
☞ Si al sustituir x_1 el resultado es positivo: $f''(x_0) > 0$, el punto $(x_1, f(x_1))$ es un mínimo.

Ejemplo: Halla los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.

1) Calculamos la primera derivada $f'(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

2) Resolvemos la ecuación $f'(x)=0$.

$$f'(x)=0 \Rightarrow x^2-2x=0 \Rightarrow x(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

3) Hallamos la segunda derivada $f''(x)=\dfrac{2}{(x-1)^3}$

4) Sustituimos en $f''(x)$ los posibles máximos y mínimos.

$f''(0)=-2<0 \Rightarrow (0,f(0))=(0,-2)$ es máximo relativo.

$f''(2)=2>0 \Rightarrow (2,f(2))=(2,2)$ es mínimo relativo.

☞ Este procedimiento es más útil cuando solo nos piden los **máximos** y **mínimos**.

✐ **RESUELVE**

Halla los extremos relativos (máximos y mínimos) de la función $f(x)=x^3-3x$.

Solución: Máximo relativo (-1,2); mínimo relativo (1,-2)

Generalización del procedimiento anterior

En ocasiones, la derivada segunda de una función también se anula en los puntos candidatos a ser extremos relativos. En este caso tendremos que calcular las derivadas sucesivas de la función hasta encontrar la primera que no se anule. Si esta es de orden par existe máximo o mínimo, según el siguiente esquema:

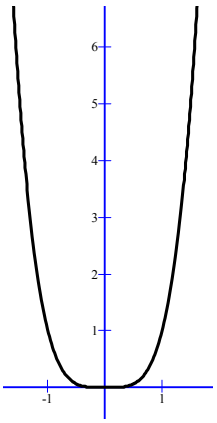
Supongamos que $f'(x_0)=f''(x_0)=...=f^{(2n-1)}(x_0)=0$ y $f^{(2n)}(x_0)\neq 0$.

- Si $f^{(2n)}(x_0)<0 \Rightarrow f$ tiene un máximo en $(x_0,f(x_0))$.
- Si $f^{(2n)}(x_0)>0 \Rightarrow f$ tiene un mínimo en $(x_0,f(x_0))$.

Ejemplo:

Halla los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)=x^4$.

Solución: Observando la gráfica vemos que tiene un mínimo en el punto (0, 0)



Hallamos las derivadas sucesivas de $f(x) = x^4$ en el punto $x = 0$.

$f'(x) = 4x^3,\ f'(0) = 4 \cdot 0^3 = 0$

$f''(x) = 12x^2,\ f''(0) = 12 \cdot 0^2 = 0$

$f'''(x) = 24x,\ f'''(0) = 24 \cdot 0 = 0$

$f^{(IV)}(x) = 24,\ f^{(IV)}(0) = 24 > 0\ (\text{mínimo})$

✐ **RESUELVE**

Halla los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = -x^6 + 2$.

Segundo procedimiento

1. Se halla el dominio de la función y los puntos de discontinuidad de la misma.

2. Se obtienen los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

☞ Si en uno de esos intervalos la función es creciente y en el siguiente decreciente, siendo el extremo común de los intervalos un punto donde $f'(x) = 0$, tenemos un máximo.

☞ Si en uno de esos intervalos la función es decreciente y en el siguiente creciente, siendo el extremo común de los intervalos un punto donde la función donde $f'(x)=0$, tenemos un mínimo.

☞ Los puntos donde la función no sea continua o no exista serán eliminados.

Ejemplo:

Halla el crecimiento, decrecimiento y los máximos y mínimos de la función $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$.

1. Hallamos los puntos de discontinuidad y el dominio de f.

   $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{-1,1\}$, $x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$ (puntos de discontinuidad)

2. Buscamos los puntos que anulan la derivada

   $f'(x)=\dfrac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2}$; $f'(x)=0 \Rightarrow -2x=0 \Rightarrow x=0$ (posible máximo o mínimo)

3. Construimos la siguiente tabla:

   Puntos de discontinuidad y ceros de la 1ª derivada ordenados: $-1<0<1$

valores de x	$(-\infty,-1)$	**-1**	$(-1,0)$	**0**	$(0,1)$	**1**	$(1,+\infty)$
f' **es**	$+$		$+$	0	$-$		$-$
f **es**	$\nearrow$		$\nearrow$	**máximo**	$\searrow$		$\searrow$

La casilla de los valores -1 y 1 se tachan para no considerarlos como máximos o mínimos.

Estudiamos el signo de f':

En $(-\infty,-1)$ el signo de f' es: $f'(-2)=\dfrac{-2\cdot(-2)}{\left((-2)^2-1\right)^2}=\dfrac{+}{+}=+$

En $(-1,0)$ el signo de f' es: $f'(-0'5)=\dfrac{-2\cdot(-0'5)}{\left((-0'5)^2-1\right)^2}=\dfrac{+}{+}=+$

En $(0,1)$ el signo de f' es: $f'(0'5)=\dfrac{-2\cdot(0'5)}{\left((0'5)^2-1\right)^2}=\dfrac{-}{+}=-$

En $(1,+\infty)$ el signo de f' es: $f'(2)=\dfrac{-2\cdot 2}{\left(2^2-1\right)^2}=\dfrac{-}{+}=-$

La función f es creciente en $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$ y f es decreciente en $(0,1)\cup(1,+\infty)$.

Por tanto, la función tiene un **máximo relativo** en el punto $(0,f(0))=(0,0)$.

☞ Este procedimiento es más útil cuando sólo nos piden estudiar el **crecimiento** y los **máximos** y **mínimos**.

✐ **RESUELVE**

Dada la función $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$, halla:

a) Crecimiento y decrecimiento. b) Máximos y mínimos.

Solución:

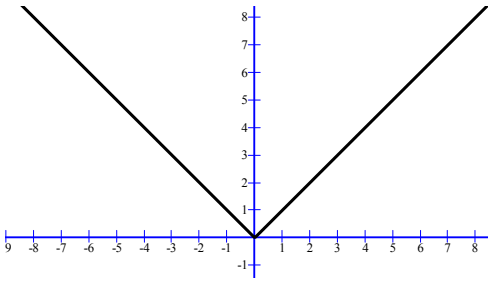
a) Crece en (-1,1) y decrece en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$; b) mínimo (-1,-1), máximo (1,1).

Observación:

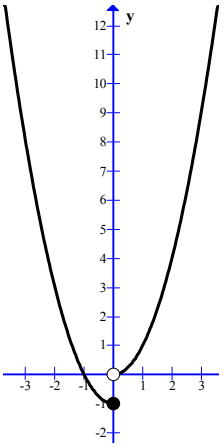
☞ Los puntos angulosos (picos) y los puntos de discontinuidad pueden ser máximos y mínimos relativos de una función f. Aunque estos no pueden ser hallados aplicando los teoremas anteriores (la función **no es derivable** en esos puntos) y, por tanto, deben ser estudiados aparte.

Por ejemplo, en las dos gráficas que vienen a continuación, x = 0, es un **mínimo** relativo.

$$y = |x|$$



$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \le 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



La primera función es continua pero no es derivable en x = 0 (punto anguloso) y la segunda tiene una discontinuidad de salto finito en x = 0, y por tanto tampoco es derivable en ese punto.

✐ RESUELVE

1º- Halla los extremos relativos de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ b) $g(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$

2º- Estudia el crecimiento (monotonía) de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2(x-3)$ b) $g(x) = x\ln x$

3º- Estudia el crecimiento y calcula los máximos y mínimos locales de las siguientes funciones:

a) $h(x) = x^4 - 2x^2$ b) $y = x^2 \cdot e^x$

Soluciones:

1º- a) Mínimo (2, 4); Máximo (0, 0) b) no tiene extremos relativos.

2º- a) creciente: $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$;decreciente: $(0,2)$ b) decreciente $(0,e^{-1})$; creciente: $(e^{-1},+\infty)$

3º- a) decreciente en: $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ creciente en $(-1,0)\cup(1,+\infty)$; Mínimos (-1, 1), (1, 1); Máximos (0, 0) b) creciente: $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$, decreciente: $(-2,0)$; mínimo (0,0), máximo $\left(-2,4e^{-2}\right)$

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Muchos problemas de los que se plantean en la ciencia, en la técnica o en la economía consisten en optimizar una función. Obtener el máximo rendimiento con el mínimo consumo, o bien, obtener los máximos beneficios con el mínimo coste. Es decir, encontrar las condiciones óptimas.

Para resolver estos problemas, aplicamos el *siguiente procedimiento:*

1. Escribimos los datos y las incógnitas, y hacemos un dibujo si es posible.

2. Escribimos la función que deseamos maximizar o minimizar.

3. A partir de los datos del problema o relaciones conocidas, dejamos la función con una sola variable independiente.

4. Hallamos los máximos o mínimos derivando e igualando a cero la derivada.

5. Comprobamos los valores en la segunda derivada.

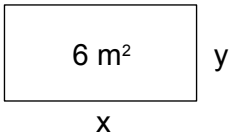
6. Interpretamos los resultados obtenidos y rechazamos los que no sean posibles.

Ejemplo:

Se desea construir un marco para una ventana rectangular de 6 m^2 de superficie. El metro lineal de tramo horizontal cuesta 20 € y el tramo vertical 30 € Calcula:
a) Las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo.
b) El coste del marco.

Solución

1) Escribimos los datos y las incógnitas y hacemos un dibujo.



2) Escribimos la función que debemos hacer mínima.

$$C = 2x \cdot 20 + 2y \cdot 30 \Leftrightarrow C = 40x + 60y$$

3) Dejamos la función anterior con una sola variable

La relación entre las dos variables es: $A = x \cdot y \Rightarrow 6 = x \cdot y \Rightarrow y = \frac{6}{x}$

$$C = 40x + 60 \cdot \frac{6}{x} \Leftrightarrow C = 40x + \frac{360}{x}$$

4) Hallamos los máximos y mínimos derivando e igualando a cero la derivada.

$$C' = 40 - \frac{360}{x^2};\ C' = 0 \Rightarrow 40 - \frac{360}{x^2} = 0 \Rightarrow 40x^2 - 360 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \pm 3$$

Nos quedamos con la solución positiva, ya que además de ser la que tiene sentido en este problema, es la que corresponde a un mínimo, pues:

5) Comprobamos en la derivada segunda.

para x = 3, $C'' = \frac{720}{3^2} = +$ (positiva)

6) La solución será: Dimensiones: **x = 3 m,** $y = \frac{6}{3} = 2m$

b) El coste es: $C = 40 \cdot 3 + 60 \cdot 2 = 240$ €

✐ **RESUELVE**

1º- Descompón el número 36 en dos sumandos positivos de modo que el producto del primer sumando por el cuadrado del segundo sea máximo.

2º- El propietario de un inmueble tiene alquilados los 40 pisos del mismo a 300 euros al mes cada uno. Por cada 1 0 euros de aumento en el precio del alquiler pierde un inquilino, que se traslada a otro piso más económico. ¿Cuál es el alquiler que más beneficios producen al propietario?

3º- Se desea construir una caja abierta de base cuadrada y con un volumen de 500 litros. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la caja para que tenga mínima superficie y, por tanto, mínimo coste?

4º- La producción de cierta hortaliza en un invernadero (Q(x) en kg) depende de la temperatura (x en °C) según la expresión $Q(x) = (x + 1)^2(32 - x)$.
a) Calcula razonadamente cuál es la temperatura óptima a mantener en el invernadero.
b) ¿Qué producción de hortaliza se obtendrá?

5º- Queremos construir unos botes cilíndricos de metal con tapadera. El coste del metro cuadrado del metal empleado en la tapadera es la mitad que el del empleado en el resto del recipiente. Si queremos que los botes tengan una capacidad de 10 litros, ¿cómo debemos construirlos para tener un coste mínimo?

Soluciones:
1º- primer sumando igual a 12 y el segundo es 24
2º- para que el beneficio sea máximo, debe poner el alquiler a 306'25 euros.
3º- base de 10 cm.de lado y altura 5 cm
4º- a) 21 °C.; b) 5 324 kg.
5º- radio 1,28 dm; altura 1,94 dm.

CURVATURA Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

Estudiar la **curvatura** de una función consiste en hallar los intervalos en los que es cóncava, $(\cup)$, y convexa, $(\cap)$.

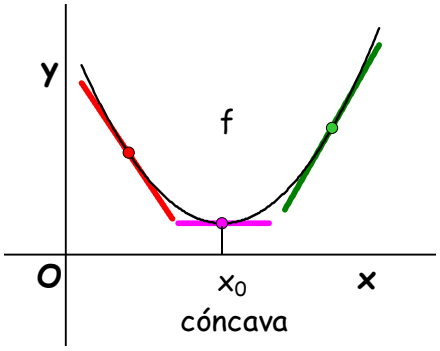
La definición de concavidad y convexidad no están unificadas dentro de las matemáticas. Lo que nosotros llamamos cóncavo, $(\cup)$, otros lo pueden llamar convexo, $(\cap)$, y al revés. Nosotros seguimos la más extendida.

Definición de concavidad

☺ Una función es **cóncava**, $(\cup)$, en **un punto** de abscisa x_0, si la función está por encima de la recta tangente en todos los puntos de un entorno reducido de x_0. (puntos próximos a x_0)

☺ Una función es **cóncava**, $(\cup)$, en **un intervalo** (a, b) si la función está por encima de la recta tangente en cada uno de los puntos de dicho intervalo.

Gráfica de una función cóncava



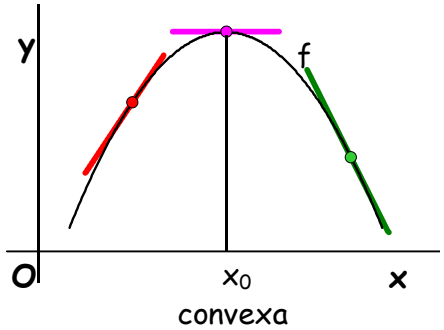
☞ **Observa** que en una curva **cóncava**, $(\cup)$, las pendientes de las rectas tangentes van creciendo. Es decir $f'(x)$ **es creciente** en el intervalo (a, b).

Definición de convexidad

☺ Una función es **convexa**, $(\cap)$, en **un punto** de abscisa x_0, si la función está por debajo de la recta tangente en todos los puntos de un entorno reducido de x_0. (puntos próximos a x_0)

☺ Una función es **convexa**, $(\cap)$, en **un intervalo** (a, b) si la función está por debajo de la recta tangente en cada uno de los puntos de dicho intervalo.

Gráfica de una función convexa



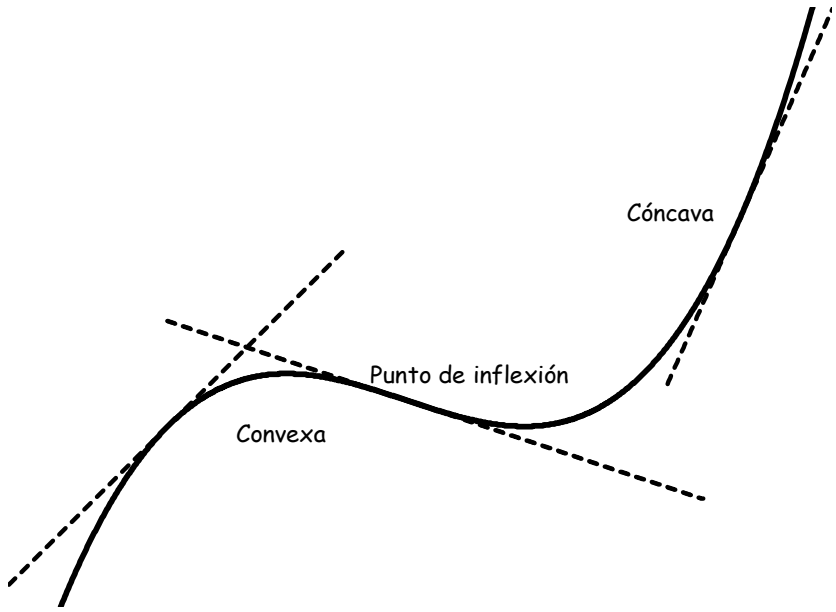
☞ **Observa** que en una curva **convexa**, $(\cap)$, las pendientes de las rectas tangentes van decreciendo. Es decir $f'(x)$ **es decreciente** en el intervalo (a, b).

Definición de punto de inflexión

☺ Un **punto de inflexión** es un punto donde cambia la curvatura de una función. Pasa de ser cóncava a convexa o al revés.

☞ En un punto de inflexión la recta tangente atraviesa la curva.

☞ En un **punto de inflexión** la función no es cóncava ni convexa sino que hay cambio de concavidad a convexidad o viceversa.



Cuando la función f admite, al menos, derivada segunda, podemos estudiar la concavidad o convexidad de la misma mediante la siguiente propiedad o teorema.

Criterio para determinar la concavidad y la convexidad

TEOREMA

Si $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow$ f es cóncava $(\cup)$ en (a,b)

Si $f''(x) < 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow$ f es convexa $(\cap)$ en (a,b)

Demostración

Nos limitaremos a ver una justificación intuitiva de estas condiciones

Si $f''(x) > 0 \Rightarrow f'(x)$ es creciente y, por tanto, la función f es cóncava

Si $f''(x) < 0 \Rightarrow f'(x)$ es decreciente y, por tanto, la función f es convexa

Criterio para determinar los puntos de inflexión

El siguiente teorema proporciona una **condición necesaria** para la existencia de puntos de inflexión.

TEOREMA

Si f tiene un punto de inflexión en a y existe f"(a), entonces f"(a) = 0

Demostración

Si $f''(a) \neq 0$ entonces será positiva o negativa y por tanto **a** será un punto de un intervalo donde la gráfica de la función es cóncava o convexa, es decir, **a** no sería un punto de inflexión. Por tanto para que en **a** haya un punto de inflexión tiene que ser $f''(a) = 0$.

Esta condición, como ya se ha dicho, es necesaria pero no suficiente, ya que puede ocurrir que $f''(a) = 0$ y no haber inflexión en **a**; pero si $f''(a) \neq 0$ es seguro que no hay inflexión.

Ejemplo: La función $f(x) = x^4$ tiene $f''(0) = 0$ y en $x = 0$ tiene un punto mínimo.

El siguiente teorema proporciona una **condición suficiente** para la existencia de puntos de inflexión.

TEOREMA

Si una función f tiene su derivada segunda nula en un punto de abscisa a y su derivada tercera en ese punto es distinta de cero, entonces la función f tiene un punto de inflexión en el punto. Simbólicamente:

$$\left.\begin{array}{l} f''(a) = 0 \\ f'''(a) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ tiene un punto de inflexión en } (a, f(a))$$

Demostración

Si $f'''(a) \neq 0$, puede ser $f'''(a) > 0$ o bien $f'''(a) < 0$. Hacemos la demostración para el caso en que $f'''(a) > 0$. Tenemos:

Si $f'''(a) > 0 \Rightarrow f''(x)$ es creciente en un entorno de **a**; por hipótesis: $f''(a) = 0$

Entonces se verifica: $f''(a-h) < f''(a) = 0 < f''(a+h)$

Por ser $f''(x) < 0$ a la izquierda de **a**, $f(x)$ es convexa, $(\cap)$, a la izquierda de **a**.
Por ser $f''(x) > 0$ a la derecha de **a**, $f(x)$ es cóncava, $(\cup)$, a la derecha de **a**.
Luego tiene un punto de inflexión en x=**a**. *c.q.d.*

Caso general

Cuando se anulan los primeras derivadas en un punto de abscisa x_0, existe punto de inflexión si la primera derivada no nula, de orden superior a 2, es impar.

Supongamos que $f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(2n)}(x_0) = 0$ y $f^{(2n+1)}(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ f tiene un punto de inflexión en $(x_0, f(x_0))$.

Ejemplos:

1º- Halla los puntos de inflexión de la función $f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2$.

Solución

Cuando nos piden solamente los puntos de inflexión es más fácil hacerlo aplicando el teorema anterior que dice:

$$\left.\begin{array}{l} f''(a) = 0 \\ f'''(a) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{f tiene un punto de inflexión en } (a, f(a))$$

Derivando sucesivamente f(x), se tiene:

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 24x, \quad f''(x) = 12x^2 - 12x - 24, \quad f'''(x) = 24x - 12$$

Resolvemos la ecuación

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 12x - 24 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Como $f'''(2) = 24 \cdot 2 - 12 \neq 0 \Rightarrow (2, f(2)) = (2, -48)$ es un punto de inflexión.

Como $f'''(-1) = 24 \cdot (-1) - 12 \neq 0 \Rightarrow (-1, f(-1)) = (-1, -9)$ es un punto de inflexión.

2º- Estudia la concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de la siguiente función: $y = \dfrac{x}{1 - x^2}$

Solución

Cuando en un ejercicio nos pidan hallar la concavidad, convexidad y puntos de inflexión el problema se resuelve más fácilmente, mediante el siguiente *procedimiento:*

a) Hallamos el dominio y puntos de discontinuidad:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1,1\}\ ,\ \ 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \ \ \text{Puntos de discontinuidad}$$

b) Hallamos los ceros de la segunda derivada (posibles puntos de inflexión)

Para ello calculamos las dos primeras derivadas: $y' = \dfrac{1+x^2}{\left(1-x^2\right)^2}$, $\quad y'' = \dfrac{6x+2x^3}{\left(1-x^2\right)^3}$

$$y'' = 0 \Rightarrow \frac{6x+2x^3}{\left(1-x^2\right)^3} = 0 \Rightarrow 6x + 2x^3 = 0 \Rightarrow 2x\left(3+x^2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 3 + x^2 = 0 \ \ (\text{no tiene soluciones reales}) \end{cases}$$

c) Ordenamos de menor a mayor los puntos de discontinuidad y los posibles puntos de inflexión (ceros de y''): -1 < 0 < 1

d) Construimos la siguiente tabla:

valores de x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	**0**	$(0,1)$	**1**	$(1,+\infty)$
$f''(x)$ **es**	$+$		$-$	**0**	$+$		$-$
$f(x)$ **es**	$(\cup)$		$(\cap)$	**Punto de Inflexión**	$(\cup)$		$(\cap)$

Los puntos de discontinuidad se tachan para no ponerlos como puntos de inflexión.

Los puntos de inflexión son aquellos puntos del dominio donde la curva cambia de cóncava a convexa o de convexa a cóncava.

Para hallar los intervalos de concavidad y convexidad estudiamos el signo de la segunda derivada:

En $(-\infty,-1)$: $\quad -2 \in (-\infty,-1),\ \ y'' = \dfrac{6\cdot(-2)+2\cdot(-2)^3}{\left(1-(-2)^2\right)^3} = \dfrac{-}{-} = +$ (positiva)

En $(-1,0)$: $\quad -0'5 \in (-1,0),\ \ y'' = \dfrac{6\cdot(-0'5)+2\cdot(-0'5)^3}{\left(1-(-0'5)^2\right)^3} = \dfrac{-}{+} = -$ (negativa)

En $(0,1)$: $\quad 0'5 \in (0,1),\ y'' = \dfrac{6\cdot(0'5)+2\cdot(0'5)^3}{\left(1-(0'5)^2\right)^3} = \dfrac{+}{+} = +$ (positiva)

En $(1,+\infty)$: $\quad 2 \in (1,+\infty),\ y'' = \dfrac{6\cdot 2+2\cdot 2^3}{\left(1-2^2\right)^3} = \dfrac{+}{-} = -$ (negativa)

e) La función es cóncava $(\cup)$ en $(-\infty,-1)\cup(0,1)$; convexa $(\cap)$ en $(-1,0)\cup(1,+\infty)$ y $(0,0)$ es un punto de inflexión.

✐ **RESUELVE**

1º- Calcula los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

a) $y = x^5$ b) $f(x) = x^3 + 3x^2$ c) $g(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

2º- Calcula los intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión de las siguientes funciones:

a) $y = x^2 \ln x$ b) $f(x) = x^4 - 6x^2$ c) $g(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

Soluciones:

1º- a) (0,0) b) (-1,2) c) No tiene

2º- a) cóncava $(\cup)$ en $\left(e^{-3/2},+\infty\right)$; convexa $(\cap)$ en $\left(0,e^{-3/2}\right)$; punto de inflexión $\left(e^{-3/2},\dfrac{-3e^{-3}}{2}\right)$

b) cóncava $(\cup)$ en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$; convexa $(\cap)$ en $(-1,1)$; puntos de inflexión $(-1,-5)$, $(1,-5)$

c) cóncava $(\cup)$ en $\left(-\sqrt{3},0\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$; convexa $(\cap)$ en $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(0,\sqrt{3}\right)$; puntos de inflexión $(0,0)$, $\left(-\sqrt{3},\dfrac{-2\sqrt{3}}{4}\right)$, $\left(\sqrt{3},\dfrac{2\sqrt{3}}{4}\right)$

REGLA DE L'HÔPITAL

Esta regla, fundamental y muy potente para el cálculo de límites indeterminados, es, en realidad, un teorema que se enuncia a continuación.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ y existe el $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces también existe $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ y se cumple que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Demostración

Si existen f'(a) y g'(a) y además es $g'(a) \neq 0$, la demostración es sencilla:

Como f y g son derivables en **x=a**, también son continuas:

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x) = 0 \text{ y } g(a) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

Entonces:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}} \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}} \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Generalizando

Además de su aplicación a las indeterminaciones $\frac{0}{0}$ y $x \to a$, la regla anterior se puede ampliar a los casos de indeterminaciones del tipo $\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$ y $x \to \pm\infty$.

Para poderla aplicar a los restantes casos indeterminados debemos antes transformarlos en alguno de estos dos.

Con frecuencia, después de aplicar la regla de L'Hôpital una vez, se llega a otra indeterminación, por lo que, si se quiere, se puede aplicar de nuevo y repetir el proceso tantas veces como sea conveniente.

CASOS DE INDETERMINACIÓN						
$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$0 \cdot \infty$	$\infty - \infty$	0^0	∞^0	1^∞

- Caso $\frac{0}{0}$: Se aplica directamente la regla de L'Hôpital las veces que sean necesarias.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2} = "\frac{0}{0}" \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2x \cos x^2}{2x} = \lim_{x \to 0} \cos x^2 = 1$$

- Caso $\frac{\infty}{\infty}$: Se aplica directamente la regla de L'Hôpital las veces que sean necesarias.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2+4}=\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=0$$

- Caso $0\cdot\infty$: Para aplicar L'Hôpital se transforma el límite en uno de los casos anteriores.

Si $\lim_{x\to a}f(x)=0$ y $\lim_{x\to a}g(x)=\infty$, entonces

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\text{"}0\cdot\infty\text{"}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\text{"}\frac{0}{0}\text{"}=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}=\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}=\text{L'Hôpital}$$

☞ Debes dejar en el numerador la función que invertida tenga la derivada más difícil.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 0^+}x\cdot\ln x=\text{"}0\cdot\infty\text{"}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$$

- Caso $\infty-\infty$:

Si $\lim_{x\to a}f(x)=\infty$ y $\lim_{x\to a}g(x)=\infty$, entonces

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right]=\text{"}\infty-\infty\text{"}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x)\cdot f(x)}}=\text{"}\frac{0}{0}\text{"}=\text{L'Hôpital}$$

☞ A veces este tipo de problemas se resuelven reduciendo a común denominador las fracciones, no siendo necesario usar la transformación indicada arriba.

Ejemplos:

a) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen}x}\right)=\text{"}\infty-\infty\text{"}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1/\operatorname{sen}x}-\frac{1}{1/x}}{\frac{1}{1/(x\cdot\operatorname{sen}x)}}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x-x}{x\operatorname{sen}x}=\text{"}\frac{0}{0}\text{"}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\operatorname{sen}x+x\cos x}=\text{"}\frac{0}{0}\text{"}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}x}{\cos x+\cos x-x\operatorname{sen}x}=-\frac{0}{2}=0$$

b) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{2x}{x-1}-\dfrac{3}{\ln x}\right)=\text{"}\infty-\infty\text{"}\underset{\text{Reducimos a común denominador}}{=}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x\ln x-3x+3}{(x-1)\ln x}=\text{"}\dfrac{0}{0}\text{"}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}$

$=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2\ln x+2-3}{\ln x+(x-1)\cdot\dfrac{1}{x}}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty$

- Caso 0^0, ∞^0, 1^∞:

Estas indeterminaciones aparecen en límites de la forma: $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}$

☞ Se resuelven aplicando el siguiente *procedimiento*:

Llamamos M al límite anterior, $M=\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}$

Tomamos logaritmos neperianos:

$\ln M=\ln\left[\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}\right]=\lim\limits_{x\to a}\left[\ln f(x)^{g(x)}\right]=\lim\limits_{x\to a}\left[g(x)\cdot\ln f(x)\right]=\text{"}0\cdot\infty\text{"}$ L'Hôpital

Supongamos que el límite anterior vale λ, entonces:

$\ln M=\lambda\Rightarrow M=e^{\lambda}=\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}$

Ejemplo:

$\lim\limits_{x\to 0}(\text{sen}x)^x=\text{"}0^0\text{"};\ M=\lim\limits_{x\to 0}(\text{sen}x)^x;\ \ln M=\ln\left[\lim\limits_{x\to 0}(\text{sen}x)^x\right]\Rightarrow\ln M=\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln(\text{sen}x)^x\right]=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\ln\text{sen}x\right)=\text{"}0\cdot\infty\text{"}$

$\ln M=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln\text{sen}x}{\dfrac{1}{x}}\right)=\text{"}\dfrac{\infty}{\infty}\text{"}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\dfrac{\cos x}{\text{sen}x}}{\dfrac{-1}{x^2}}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos x}{-\text{sen}x}=\text{"}\dfrac{0}{0}\text{"}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2x\cos x+x^2\text{sen}x}{-\cos x}=\dfrac{0}{1}=0$

Por tanto, el límite vale: $\ln M=0\Rightarrow M=e^0=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}(\text{sen}x)^x=1$

✐ RESUELVE

1º- Aplicando la Regla de L'Hôpital halla los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}$ b) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}x}{x\operatorname{sen}x}$ c) $\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^3-5x^2+7}{x^3+3x-5}$

d) $\lim_{x\to 3}\frac{x^4-20x-21}{x^2+11x-42}$ e) $\lim_{x\to 0}x^{\operatorname{sen}x}$ f) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln x}\right)$

Soluciones: a) 1; b) 0; c) 2; d) 88/17; e) 1; f) $-\infty$

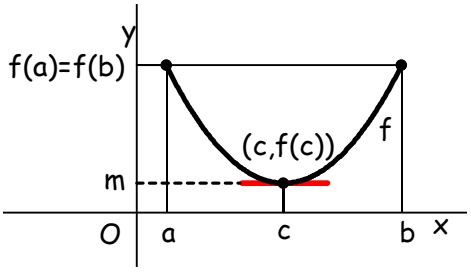
TEOREMAS DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

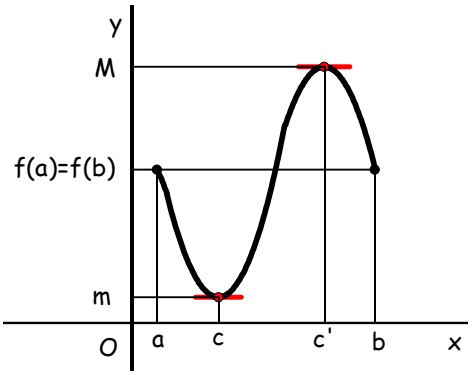
Teorema de Rolle

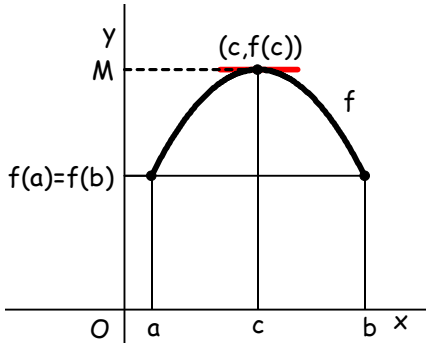
Si una función f es continua en un intervalo cerrado [a, b], derivable en el intervalo abierto (a, b) y $f(a)=f(b)$ entonces existe al menos un punto $c\in(a,b)/f'(c)=0$.

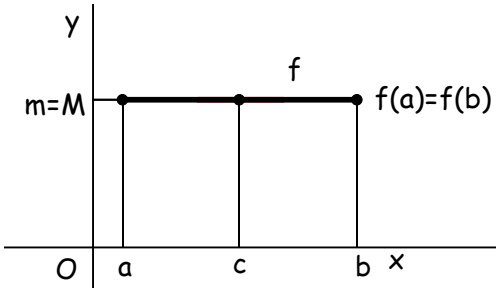
Interpretación geométrica

Geométricamente, este teorema significa que cuando la gráfica de una función continua en el intervalo cerrado [a, b] y derivable en el abierto (a, b) toma valores iguales en los extremos de [a, b], entonces existe por lo menos un punto $(c,f(c))$ en el que la tangente a la curva $y=f(x)$ es paralela al eje OX.









☞ Puesto que la función es continua en el intervalo cerrado [a, b], según el teorema de Weierstrass, tiene un máximo **M** y un mínimo **m** en dicho intervalo.

En estas condiciones son posibles dos casos: $M = m$ ó $m < M$

En el primer caso, $M = m = f(a) = f(b) = f(x)$, es decir, es una función constante. Entonces la derivada de la función es igual a cero en todos los puntos del intervalo (a, b), con lo que el teorema queda demostrado.

En el segundo caso, puesto que $f(a) = f(b)$, al menos uno de los valores m o M no lo toma en los extremos del intervalo [a, b], es decir, existe un punto $c \in (a,b)$ en el cual la función toma el máximo o el mínimo. En este caso, como la función es derivable en (a, b) entonces $f'(c) = 0$.

Ejemplo:

1º- Comprueba si la función $f(x) = x^2 - 4x$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [1, 3] y halla el punto en el que se verifica la tesis.

Solución:

a) La función es continua en el intervalo cerrado [1,3] porque es una función polinómica y estas funciones son continuas en $\mathbb{R}$.

b) La función es derivable en el intervalo abierto (1,3) porque es una función polinómica y estas funciones son derivables en $\mathbb{R}$. Su derivada es $f'(x) = 2x - 4$.

c) $f(1) = f(3) = -3$.

En estas condiciones se puede aplicar el teorema de Rolle y existe un punto $c \in (1,3)$ en el que la derivada es cero, es decir $f'(c) = 0$.

Efectivamente: $f'(c) = 2c - 4 = 0 \Rightarrow c = 2 \in (1,3)$.

✐ RESUELVE

1º- Averigua si verifica el teorema de Rolle la función $f(x)=|x|$ en el intervalo [-1,1].

2º- 1) Calcula **a**, **b** y **c** para que la función $f(x)=\begin{cases} x^2+ax & \text{si } x<3 \\ x+b & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0, 8].

2) Encuentra el punto (o puntos) correspondiente a la tesis del teorema.

Soluciones:

1º- No lo verifica porque la función no es derivable en $x=0\in(-1,1)$

2º- 1) a = -5, b = -9; 2) x = 5/2

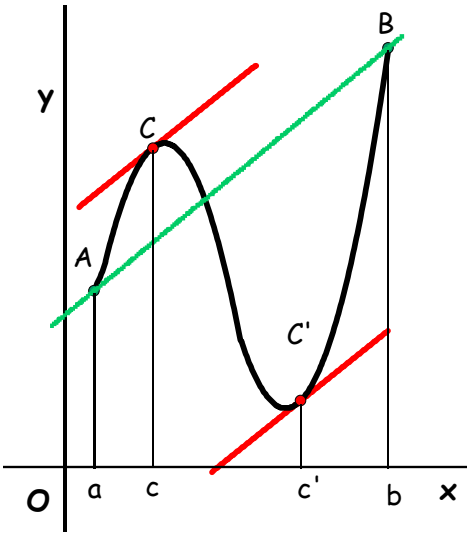
Teorema del valor medio o de Lagrange

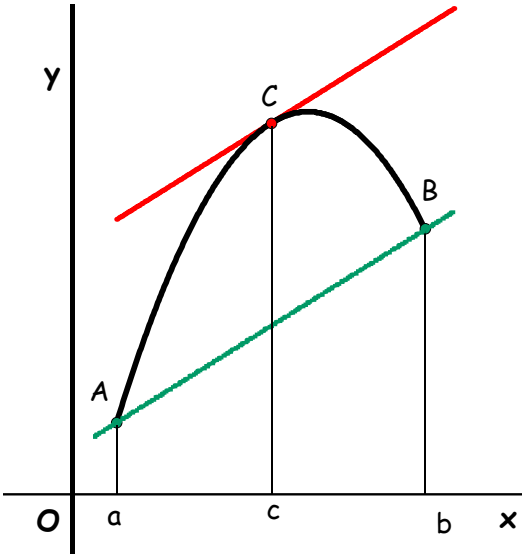
Si una función f es continua en un intervalo cerrado [a, b], derivable en el intervalo abierto (a, b) entonces existe al menos un punto $c\in(a,b)$ tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

Interpretación geométrica

Geométricamente, este teorema significa que cuando la gráfica de una función continua tiene tangente en todo punto del arco AB, entonces hay por lo menos un punto C de la gráfica en el que la tangente es **paralela a la secante AB**.

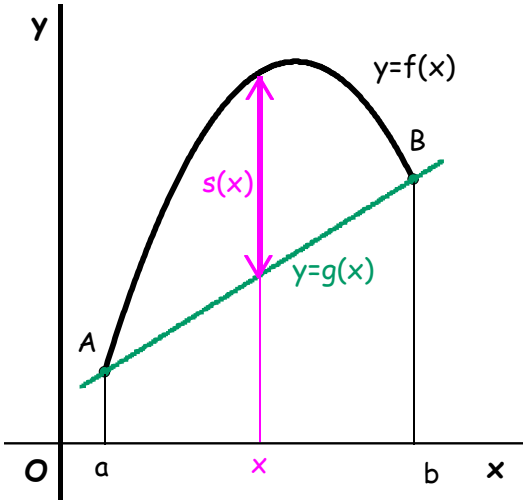




Demostración

Para demostrar este teorema nos valdremos de la función auxiliar

$$s(x) = f(x) - g(x)$$



donde $s(x)$ mide la longitud del segmento vertical entre la curva $(y = f(x))$ y la secante $(y = g(x))$.

Por tanto:

Como $g(x)$ pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ y es la ecuación de una recta, podremos aplicar la fórmula punto pendiente: $y - y_0 = m(x - x_0)$

siendo: $a = x_0$, $f(a) = y_0$, $m = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Sustituyendo los datos anteriores en la fórmula quedará:

$$g(x) - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \text{ o también } g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

Luego, $s(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)$

Esta función verifica el teorema de Rolle, ya que:

Es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $s(a) = s(b) = 0$

En consecuencia, existe algún $c \in (a,b)$, donde $s'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$

Luego $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

El primer miembro de esta igualdad es la <u>pendiente de la tangente</u> y el segundo miembro el de la <u>secante</u>. Ambas son iguales.

Ejemplo:

1º- Comprueba si la función $f(x) = 2x - x^2$ cumple las hipótesis del teorema de Lagrange en el intervalo [1, 3] y halla el punto en el que se verifica la tesis.

Solución

a) $y = f(x)$ es continua en el intervalo cerrado [1, 3] por ser una función polinómica.

b) $y = f(x)$ es derivable en el intervalo abierto (1, 3) por ser una función polinómica y su derivada es $f'(x) = 2 - 2x$.

Entonces según el teorema de Lagrange existe un punto $c \in (1,3)$ tal que se verifica:

$$f'(c) = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} \Rightarrow 2 - 2c = \frac{-4-0}{2} \Rightarrow 2 - 2c = -2 \Rightarrow -2c = -4 \Rightarrow c = 2$$

✐ **RESUELVE**

1º- Averigua si verifica el teorema de Lagrange la función $f(x) = |x-2|$ en el intervalo [0, 4].

2º- Halla un punto de la gráfica $y = \ln x$ en el que la recta tangente sea paralela a la recta AB siendo A(1, 0), B(e, 1) dos puntos de la gráfica $y = \ln x$.

3º- Enuncia el teorema de Rolle. Interpretación geométrica. Estudia si se puede aplicar dicho teorema a la función $f(x) = \dfrac{|x|}{(x+1)(x-1)}$ en el intervalo $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

Soluciones:

1º- No lo verifica porque la función no es derivable en $x = 2 \in (0,4)$

2º- Aplicamos el teorema de Lagrange al intervalo (1, e). El punto pedido es

3º- El enunciado y la interpretación geométrica la tienes en los apuntes. No porque la función no es derivable en $x = 0 \in \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

PROCEDIMIENTO PARA ANALIZAR UNA FUNCIÓN

Para analizar una función, tenemos que aplicar todas las propiedades que hemos aprendido anteriormente. Algunas las obtenemos directamente de la función y otras las obtenemos de las funciones derivadas. Las sintetizamos en la siguiente tabla:

1. Dominio, $\mathrm{Dom}(f)$ Continuidad	Conjunto de valores de la variable independiente, **x**, para los que existe la función. Valores del $\mathrm{Dom}(f)$ donde es continua
Si la función viene dada por una sola fórmula, el dominio y la continuidad coinciden.	
2. Simetrías f par $\Rightarrow$ Simetría respecto del eje OY. f impar $\Rightarrow$ Simetría respecto del origen O(0, 0).	Calculamos $f(-x)$ $f(-x)=f(x)$ $-f(-x)=f(x)$
3. Asíntotas Verticales: $x=a$ Horizontales: $y=k$ Oblicuas: $y=mx+n$	$\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ $k=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ a) $\lim_{x\to\infty} f(x)=\pm\infty$ b) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=m\neq 0$ c) $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=n$
4. Puntos de corte con los ejes Eje OX Eje OY	Se hace $y=0$. Puntos de la forma $(x,0)$ Se hace $x=0$. Puntos de la forma $(0,y)$

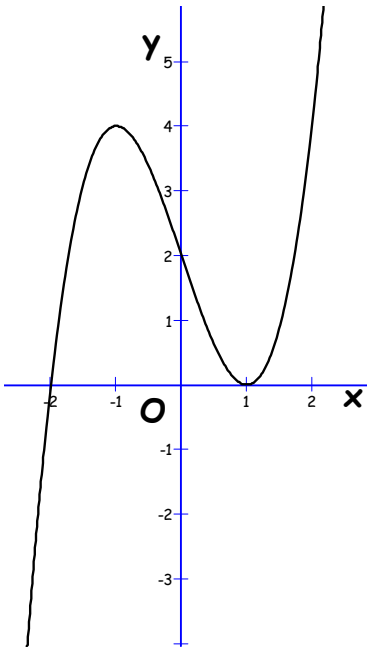
5. Máximos y mínimos	$f'(x)=0$ $f''(a)<0 \Rightarrow (a,f(a))$ es máximo relativo $f''(a)>0 \Rightarrow (a,f(a))$ es mínimo relativo
Monotonía (Crecimiento y decrecimiento)	$f'(x)>0 \Rightarrow$ creciente $\nearrow$ $f'(x)<0 \Rightarrow$ decreciente $\searrow$
6. Puntos de inflexión	$f''(x)=0$ y $f''(a)\neq 0 \Rightarrow$ $(a,f(a))$ es de inflexión
Curvatura (Concavidad y convexidad)	$f''(x)>0 \Rightarrow$ f cóncava $(\cup)$ $f''(x)<0 \Rightarrow$ f convexa $(\cap)$
7. Gráfica	Hacer el dibujo de la curva
8. Recorrido o imagen, $\mathrm{Im}(f)$	Conjunto de valores que toma la variable dependiente, **y**

✐ **RESUELVE**

1º- Representa gráficamente la función $f(x)=x^3-3x+2$

1. $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}$ y f es continua en $\mathbb{R}$.
2. No tiene simetrías
3. Asíntotas: No tiene
4. Puntos de corte con los ejes: (-2, 0), (1, 0) y (0, 2).
5. Extremos relativos: Máximo (-1, 4); Mínimo (1, 0).
6. Monotonía: Creciente en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$; Decreciente en $(-1,1)$.
7. Puntos de inflexión: (0, 2).
8. Curvatura: Cóncava, $\cup$ en $(0,+\infty)$; Convexa, $\cap$ en $(-\infty,0)$

9. Gráfica



10. $\text{Im}(f) = (-\infty, \infty)$

2º- Representa gráficamente la función $f(x) = \dfrac{x^2}{2-x}$

1. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$ y f es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$.

2. No tiene simetrías

3. Asíntotas: $x = 2$, $y = -x - 2$

4. Puntos de corte con los ejes: (0, 0)

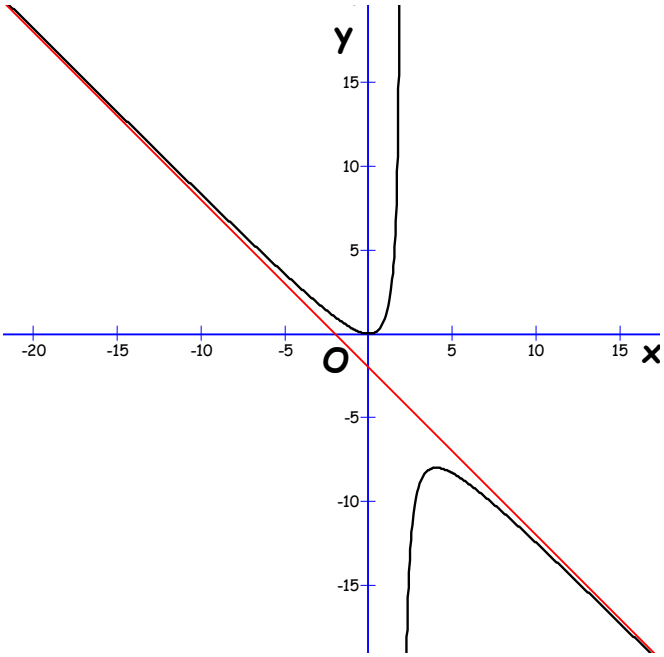
5. Extremos relativos: Máximo (4, -8); Mínimo (0, 0).

6. Monotonía: Creciente en $(0,2) \cup (2,4)$; Decreciente en $(-\infty,0) \cup (4,+\infty)$.

7. Puntos de inflexión: No tiene.

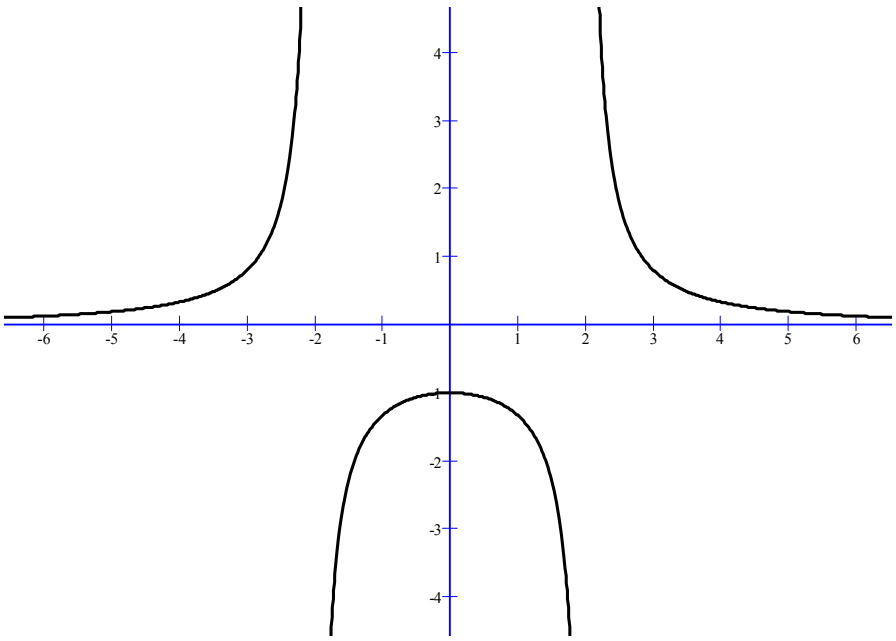
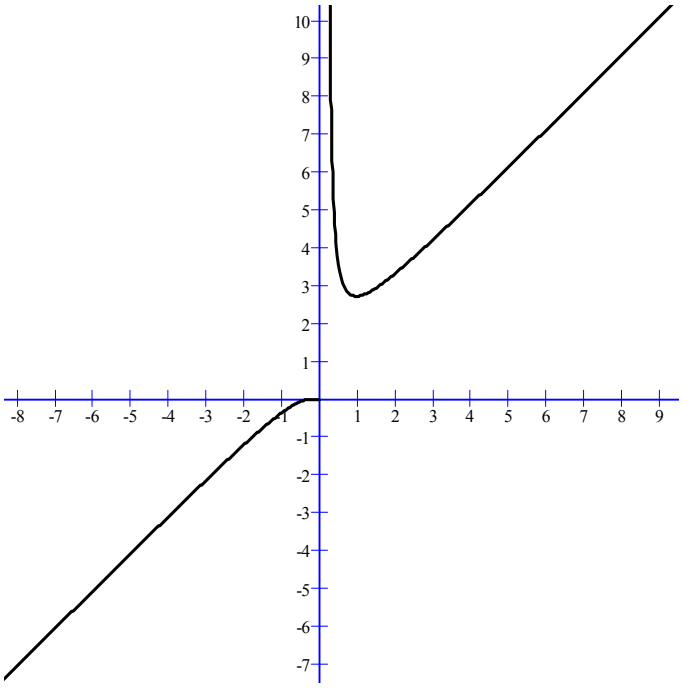
8. Curvatura: Cóncava, $\cup$ en $(-\infty,2)$; Convexa, $\cap$ en $(2,+\infty)$

9. Gráfica



10. $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} - (-8,0)$

3º- Representa gráficamente la función $f(x) = \dfrac{4}{x^2 - 4}$



4º- Representa gráficamente la función $f(x) = xe^{1/x}$