Unidad 8 – Números reales. Funciones reales

PÁGINA 183

cuestiones iniciales

1. Representa en la recta real los siguientes conjuntos:

a) $[-1, 4]$ c) $E(-1, 4)$ e) $(-\infty, 5]$

b) $(-1, 4)$ d) $E^*(3, 3)$ f) $E^+(3, 3)$

2. Estudia si los siguientes conjuntos están o no acotados. En caso afirmativo, determina, si existen, los extremos relativos, máximos y mínimos.

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| < 3\}$ $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x < 4\}$ $C = (-2, 1) \cup (0, 2]$

3. Dibuja una gráfica de una función que responda a las siguientes características:

a) Dom $f = \mathbb{R}$; Im $f = [-5, +\infty)$.

b) Estrictamente decreciente en $(-\infty, -3)$; estrictamente creciente en $(-3, 0)$.

c) Simétrica respecto del eje de ordenadas.

d) Máximo relativo en $(0, 2)$ y mínimo relativo en $(-3, -5)$.

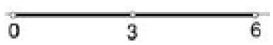
SOLUCIONES

1. Quedaría:

$[-1, 4]$ 

$(-1, 4)$ 

$E(-1, 4) = (-5, 3)$ 

$E^*(3, 3) = (0, 6) - \{3\}$ 

$(-\infty, 5]$ 

$E^+(3, 3) = (3, 6)$ 

2. La solución es:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| < 3\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 5\}$$

A esta acotado superiormente por 5 e inferiormente por – 1, luego, A esta acotado. No tiene máximos ni mínimos.

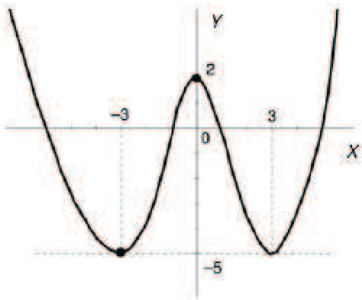
$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x < 4\}$$

B esta acotado superiormente por 4 e inferiormente por 3, luego, B esta acotado. Tiene mínimo, el 3.

$$C = (-2,\ 1) \cup (0,\ 2]$$

C esta acotado superiormente por 2 e inferiormente por – 2, luego C esta acotado. Tiene máximo, el 2.

3. La representación queda:



PÁGINA 199

ACTIVIDADES

- Reflexiona sobre las siguientes conjeturas:

1. **Primos gemelos.** Hay infinitos pares de números primos gemelos, es decir, de primos cuya diferencia es igual a 2. Ejemplo: 7 y 5 son primos gemelos, ya que 7 – 5 = 2. Encuentra cuatro pares de números primos gemelos.
2. **Números primos generados.** El polinomio $n^2 - n + 41$, cuya indeterminada n es entera, genera números primos cuando n va desde –40 hasta 40. Este polinomio, ¿genera primos para cualquier entero n?
3. **Número mágico.** Toma un número de tres cifras. Forma el número que se obtiene al escribir a la derecha del anterior el número repetido. Este número de 6 cifras lo dividimos por 7 y al cociente obtenido, por 11, y al último cociente, por 13. ¿Qué se observa?
4. **Conjetura de Collatz o (3n + 1).** Compruébala para los valores de n: 7, 12, 17 y 30.

SOLUCIONES

1. Esta es una conjetura que esta sin demostrar.
   Hasta el número 100 podemos encontrar varios primos gemelos: 5 y 7; 11 y 13; 17 y 19; 29 y 31; 41 y 43; 71 y 73.

2. En efecto, el polinomio $n^2 - n + 41$ genera números primos para valores de n comprendidos entre – 40 y 40.
   Por ejemplo:
   $n = 25 \Rightarrow\ n^2 - n + 41 = 641$ que es un número primo.
   Para cualquier valor de <<n>> no genera números primos, pues, por ejemplo, para $n = 41 \Rightarrow\ n^2 - n + 41 = 41^2 - 41 + 41 = 41^2$ que es un número compuesto, no es un número primo.

3. Tomamos un numero de tres cifras cualesquiera, 739, y le aplicamos lo que dice el problema:
   $$\frac{739739}{7 \cdot 11 \cdot 13} = 739$$
   Observamos que obtenemos el número de partida. Veamos que esto se cumple con cualquier numero y para ello partimos de un numero cualquiera *xyz*:
   $$\begin{aligned} &xyzxyz = \\ &= 100\ 000x + 10\ 000y + 1\ 000z + 100x + 10y + z = \\ &= 1\ 001 \cdot (100x + 10y + z) = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot xyz \end{aligned}$$
   Por tanto, al dividir *xyzxyz* por 7, por 11y por 13, obtenemos el número de partida *xyz*.

4. Indicamos con $f^2(x)=f(f(x))$ y así sucesivamente por cuestiones de escritura.

Para $n=7$

$f(7) = 22$; $f^2(7) = 11$; $f^3(7) = 34$; $f^4(7) = 17$; $f^5(7) = 52$; $f^6(7) = 26$; $f^7(7) = 13$; $f^8(7) = 40$; $f^9(7) = 20$; $f^{10}(7) = 10$; $f^{11}(7) =5$; $f^{12}(7) = 16$; $f^{13}(7) = 8$; $f^{14}(7) = 4$; $f^{15}(7) = 2$; $f^{16}(7) = 1$…

Para $n=12$

$f(12) = 6$; $f^2(12) = 3$; $f^3(12) = 10$; $f^4(12) = 5$; $f^5(12) = 16$; $f^6(12) = 8$; $f^7(12) = 4$; $f^8(12) = 2$; $f^9(12) = 1$…

Para $n=17$

$f(17) = 52$; $f^2(17) = 26$; $f^3(17) = 13$; $f^4(17) = 40$; $f^5(17) = 20$; $f^6(17) = 10$; $f^7(17) = 5$; $f^8(17) = 16$; $f^9(17) = 8$; $f^{10}(17) = 4$; $f^{11}(17) =2$; $f^{12}(17) = 1$ …

Para $n=30$

$f(30) = 15$; $f^2(30) = 46$; $f^3(30) = 23$; $f^4(30) = 70$; $f^5(30) = 35$; $f^6(30) = 106$; $f^7(30) = 53$; $f^8(30) = 160$; $f^9(30) = 80$; $f^{10}(30) = 40$; $f^{11}(30) =20$; $f^{12}(30) = 10$; $f^{13}(30) = 5$; $f^{14}(30) = 16$; $f^{15}(30) = 8$; $f^{16}(30) = 4$; $f^{17}(30) = 2$; $f^{18}(30) = 1$ …

PÁGINA 204

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Halla el menor conjunto al que pertenecen los siguientes números:

$-4/3$	$1{,}0\hat{4}$	-4^2	$\sqrt{15}$	$\sqrt[3]{27}$	$-16/\sqrt{4}$	$9^{1/2}$
0	$\pi/2$	$3\sqrt{2}$	$\sqrt{64}$	$2/5$	e^0	$\sqrt[3]{-8}$

2. Representa sobre la recta los siguientes conjuntos:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3 \text{ y } x > 5\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 4 \text{ y } x < 6\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x > -5 \text{ y } x \leq 2\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2{,}5 \text{ y } x < 5{,}2\}$

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ o } x \geq 3\}$

f) $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 3 \text{ o } x \geq 2\}$

g) $G = (-\infty, -1) \cup [2, 5)$

h) $H = (-6, -4) \cap [-4, 8)$

3. Define por comprensión, dentro del conjunto de los números reales, los siguientes subconjuntos:

a) $[-3, 5]$

b) $(-3, 5]$

c) $(2, +\infty)$

d) $(-\infty, 2]$

e) $E(3, 1)$

f) $E^*(3, 1)$

g) $E^+(3, 1)$

h) $E^-(-3, 1)$

i) $E(1, 3)$

j) $E(-2, 1)$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $[1, 5] \cup E(7, x) = [1, 10)$

b) $(-2, 3] \cap E(x, 2) = (-1, 3)$

c) $E(3, 2) \cap E(2, 1) = (1, x)$

d) $[2, x) \cap [4, 8] = [2, 8]$

5. Estudia si los siguientes conjuntos están o no acotados. Determina, si existen, los extremos superior e inferior, además del máximo y mínimo.

a) $A = (-5, 7)$

b) $B = [-5, 7]$

c) $C = [-5, 7)$

d) $D = (-5, 7]$

e) $E = (-3, 1)$

f) $F = (-6, 1) \cup [0, 3)$

g) $G = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

h) $H = [-6, 1] \cap (0, 3)$

i) $I = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3 \text{ o } x < 1\}$

j) $J = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{1}{3^n};\ n \in \mathbb{N}\right\}$

6. Escribe los siguientes conjuntos en forma de intervalos y represéntalos gráficamente:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 3\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| < 1\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |3 - x| < 2\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2|x + 1| \leq 5\}$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $|x - 2| = 1$

b) $|x - 3| + |x - 1| = 2$

c) $x^2 - 2|x| - 3 = 0$

8. Encuentra, si existen, el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 3\}$

b) $B = \left\{\frac{n+2}{n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$

SOLUCIONES

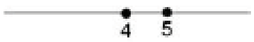
1. La solución es:

Son números naturales	$\sqrt[3]{27}$	$9^{1/2}$	$\sqrt{64}$	e^0	0
Son números enteros	-4^2	$-16/\sqrt{4}$		$\sqrt[3]{-8}$	
Son números racionales	$-4/3$	$1,0\widehat{4}$	$2/5$		
Son números reales	$\sqrt{15}$	$\pi\backslash 2$	$3\sqrt{2}$		

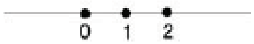
2. Queda:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\} = (5, +\infty)$

b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 4 \leq x < 6\} = \{4, 5\}$



c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid -5 < x \leq 2\} = \{0, 1, 2\}$



d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2{,}5 < x < 5{,}2\} = (2{,}5;\ 5{,}2)$

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ o } x \geq 3\} = (-\infty, -1) \cup [3, +\infty)$

f) $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 3 \text{ o } x \geq 2\} = \mathbb{Z}$

g) $G = (-\infty, -1) \cup [2, 5)$ 

h) $H = (-6, -4) \cap [-4, 8) = \varnothing$

3. Quedaría:
   a) $[-3, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 5\}$
   b) $(-3, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 5\}$
   $(2, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$
   $(-\infty, 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$
   $E(3, 1) = (2, 4) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4\}$
   $E^*(3, 1) = (2, 4) - \{3\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4;\ x \neq 3\}$
   $E^+(3, 1) = (3, 4) = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 4\}$
   $E^-(3, 1) = (2, 3) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$
   $E(1, 3) = (-2, 4) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 4\}$
   $E^*(-3;\ 0{,}2) = (-3{,}2;\ -2{,}8) - \{-3\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -3{,}2 <$
   $< x < 2{,}8;\ x \neq -3\}$

4. La solución es:
   a) $[1, 5] \cup (7 - x, 7+x) = [1, 10) \Rightarrow x = 3$

   b) $(-2,3] \cap (x-2, x+2) = (-1,3) \Rightarrow x = 1$

   c) $E(3,2) \cap E(2,1) = (1, x) \Rightarrow (1,5) \cap (1,3) = (1, x) \Rightarrow x = 3$

5. Los conjuntos A, B, C y D están acotados inferiormente por cualquier número menor o igual que (- 5) y superiormente por cualquier número mayor o igual que 7; luego estos conjuntos están todos acotados.
   a) A no tiene máximos ni mínimos
   b) B tiene mínimo en – 5 y máximo en 7.
   c) C tiene mínimo en – 5 y no tiene máximo.
   d) D tiene máximo en 7 y no tiene mínimo.
   e) E $(-3,1) = (-4,-2)$ esta acotado y no tiene máximo ni mínimo.
   f) F $= (-6,1) \cup [0,3) = (-6,3)$ esta acotado y no tiene máximo ni mínimo.
   g) $G = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ no esta cotado superiormente, por tanto, G no esta acotado.
   h) $H = [-6,1] \cap (0,3) = (0,1]$ esta acotado y tiene máximo en 1.
   i) $I = \{x \in \Re \mid x > 3 \text{ o } x < 1\} = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ no esta acotado.
   j) $J = \{\ x \in \Re \mid x = \frac{1}{3^n}; n \in \aleph = \left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots\right\}$

   J esta acotado y tiene máximo en 1.

6. Quedaría:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 3\} = [-3, 3]$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-2| < 1\} = (1, 3)$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |3-x| < 2\}; -2 < 3 - x < 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow -5 < -x < -1 \Rightarrow 5 > x > 1 \Rightarrow 1 < x < 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow C = (1, 5)$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2|x+1| \leq 5\}$
$-5 \leq 2x + 2 \leq 5 \Rightarrow -7 \leq 2x \leq 3 \Rightarrow -3{,}5 \leq x \leq 1{,}5$
$D = [-3{,}5; 1{,}5]$

7. Queda:

a) $$|x-2| = 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \\ \text{o} \\ x - 2 = -1 \end{cases} \Rightarrow x = 3 \text{ o } x = 1$$

b) La expresión $|x-3| + |x-1|$ toma los siguientes valores:

$$|x-3| + |x-1| = \begin{cases} -2x + 4 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 2x - 4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Las soluciones de la ecuación $|x-3| + |x+1| = 2$ son todos los números reales del intervalo [1,3]

c) Si $x > 0$ resolvemos $x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2 \pm 4}{2} < \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix}$

Si $x < 0$ resolvemos $x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-2 \pm 4}{2} < \begin{matrix} 1 \\ -3 \end{matrix}$

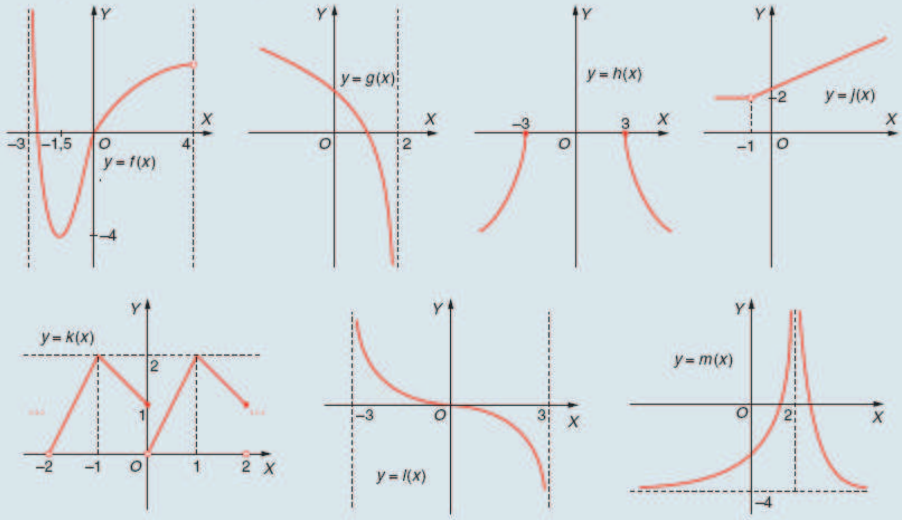
Las soluciones de la ecuación $x^2 - 2|x| - 3 = 0$ son 3 y – 3.

8. Queda:

a) el ínfimo de A es 1 y el supremo es 3.
b) el ínfimo de B es 1 y el supremo es 2.

PÁGINA 205

■ 9. Analiza, en cada una de las siguientes funciones, el dominio, el recorrido, la simetría, la periodicidad, la acotación, la monotonía y los extremos absolutos y relativos.



■ 10. Estudia el dominio, la simetría y la periodicidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^4 - 2x^2$
b) $f(x) = \cos 2x$
c) $f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 2x}$
d) $f(x) = x\,e^{x}$
e) $f(x) = |\text{sen}\,x|$
f) $f(x) = \dfrac{3}{x^2+4}$
g) $f(x) = \ln(x^2 - 9)$
h) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 7x + 12}$

■ 11. Dibuja las gráficas correspondientes a las funciones que verifican las siguientes condiciones:

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{+2, -2\}$; Im $f = \mathbb{R}$; estrictamente creciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$; estrictamente decreciente en $(0, +2) \cup (2, +\infty)$, y f es par.

b) Dom $f = \mathbb{R}$; Im $f = [-3, 3)$; mínimo relativo en $(-3, -3)$ y máximo relativo en el punto $(1, 2)$.

c) Dom $f = (0, +\infty)$; f acotada superiormente por 2; máximo relativo en $(2, 1)$ y mínimo relativo en el punto $(4, -1)$.

d) Función periódica con período 1, dominio de definición $[-3, 3]$ y simétrica respecto del origen de coordenadas.

■ 12. Dadas las funciones $f(x) = 1$; $g(x) = x^2 + 1$; $h(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, halla las siguientes funciones:

a) $g \circ f \circ h$
b) $f \circ g \circ h$
c) $h \circ g \circ f$

■ 13. Dada la función $f(x) = \ln\left[\dfrac{1-x}{1+x}\right]$, demuestra que $\forall a, b \in (-1, 1)$ cumple que:

$$f(a) + f(b) = f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$$

■ 14. Sabiendo que $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$, halla $f(x)$.

■ 15. Sean las funciones $f(x) = \dfrac{3x-1}{4}$ y $g(x) = 2 - 5x$. Comprueba que $[f \circ g]^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

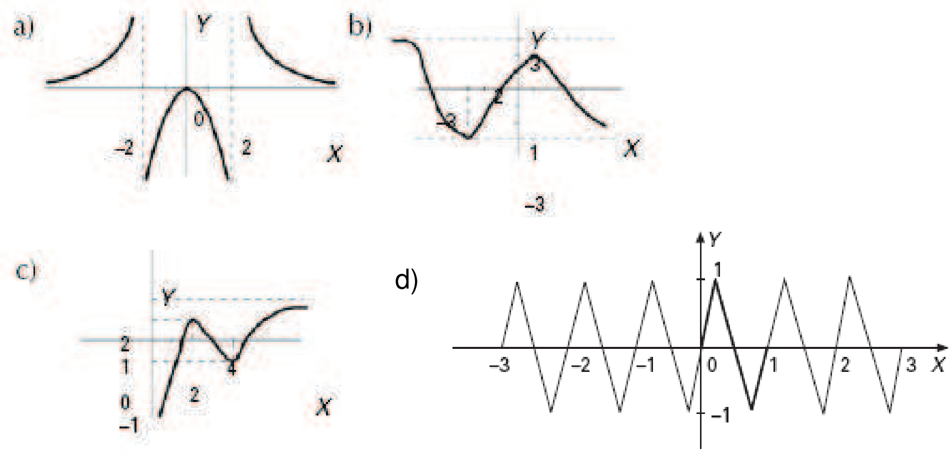
9. Los datos son:

Función	Dominio	Recorrido	Simetría	Periodi	Acota.	Creciente	Decrec	Extre. Absol	Extre. Relativos
y=f(x)	(-3,4)	[-4, ∞)	No	No	No	(-1´5;4)	(-3,-1,5)	Min -4	Min (-1,5,-4)
y=g(x)	($-\infty$,2)	$\mathbb{R}$	No	No	No	No	($-\infty$,2)	No	No
y=h(x)	($-\infty$,-3] U [3, ∞)	($-\infty$,0]	Par	No	No	($-\infty$,-3)	(3, ∞)	Máx. 0	No
y=j(x)	$\mathbb{R}$ -{-1}	[2, ∞)	No	No	No	(-1, ∞)	No	Min -2	No
y=k(x)	$\mathbb{R}$	(0,2]	No	Sí T =2	Sí	(0,1)	(1,2)	Min 0 Máx 2	Máxim. (1,2)
y=l(x)	(-3,3)	$\mathbb{R}$	Impar	No	No	No	(-3,3)	No	No
y=m(x)	R-{2}	(-4, ∞)	No	No	No	($-\infty$,2)	(2, ∞)	No	No

10. Queda:

Funciones	Dominio	Simetría	Periodicidad
a)	$\mathbb{R}$	Par	No
b)	$\mathbb{R}$	Par	Si T = π
c)	$(-\infty,-2]\cup[0,+\infty)$	No	No
d)	$\mathbb{R}$	Impar	No
e)	$\mathbb{R}$	Par	Si T = π
f)	$\mathbb{R}$	Par	No
g)	$(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$	Par	No
h)	$\mathbb{R}-\{3,4\}$	No	No

11. Quedan:



12. La solución es:

$$\text{a)}\ (g \circ f \circ h)(x) = (g \circ f)[h(x)] = (g \circ f)\left(\frac{1}{x^2+1}\right) =$$

$$= g\left[f\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\right] = g(1) = \boxed{2}$$

$$\text{b)}\ (f \circ g \circ h)(x) = (f \circ g)[h(x)] = (f \circ g)\left(\frac{1}{x^2+1}\right) =$$

$$= f\left[g\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\right] = f\left[\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^2 + 1\right] = \boxed{1}$$

$$\text{c)}\ (h \circ g \circ f)(x) = (h \circ g)[f(x)] = (h \circ g)[1] =$$

$$= h[g(1)] = h[2] = \frac{1}{2^2+1} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

13. La solución es:

$$f(a) = \ln\left(\frac{1-a}{1+a}\right) \qquad f(b) = \ln\left(\frac{1-b}{1+b}\right)$$

$$f(a)+f(b) = \ln\left(\frac{1-a}{1+a}\right) + \ln\left(\frac{1-b}{1+b}\right) = \ln\left[\left(\frac{1-a}{1+a}\right)\cdot\left(\frac{1-b}{1+b}\right)\right] = \ln\left(\frac{1+ab-a-b}{1+a+b+ab}\right) \quad (1)$$

$$f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right) = \ln\left[\frac{1-\frac{a+b}{1+ab}}{1+\frac{a+b}{1+ab}}\right] = \ln\left(\frac{1+ab-a-b}{1+a+b+ab}\right) \quad (2)$$

Como (1) = (2), queda probada la igualdad pedida.

14. La solución es:

$f(x+1) = x^2 - 3x + 2$

Hacemos $x + 1 = t \Rightarrow x = t - 1$

$f(t) = (t-1)^2 - 3(t-1) + 2 = t^2 - 5t + 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(t) = t^2 - 5t + 6$, luego:

$f(x) = x^2 - 5x + 6$

15. La solución es:

- $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[2 - 5x] =$

  $= \dfrac{3(2-5x)-1}{4} = \dfrac{5-15x}{4}$

  $y = \dfrac{5-15x}{4} \Rightarrow x = \dfrac{5-4y}{15} \Rightarrow (f \circ g)^{-1}(x) = \dfrac{5-4x}{15}$

- $f(x) = \dfrac{3x-1}{4} \Rightarrow y = \dfrac{3x-1}{4} \Rightarrow x = \dfrac{1+4y}{3} \Rightarrow$

  $\Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{1+4x}{3}$

- $g(x) = 2 - 5x \Rightarrow y = 2 - 5x \Rightarrow x = \dfrac{2-y}{5} \Rightarrow$

  $\Rightarrow g^{-1}(x) = \dfrac{2-x}{5}$

  $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = g^{-1}[f^{-1}(x)] = g^{-1}\left[\dfrac{1+4x}{3}\right] =$

  $= \dfrac{2 - \dfrac{1+4x}{3}}{5} = \dfrac{5-4x}{15} \Rightarrow (g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \dfrac{5-4x}{15}$

Luego queda probado que: $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$.

PÁGINA 206

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

16. Define y dibuja las funciones: a) $f(x) = \left||x| - 1\right| + \left|x^2 + 2|x|\right|$ b) $g(x) = \dfrac{|x^2 - 1|}{|x| + 1}$

17. Estudia el dominio de las funciones:

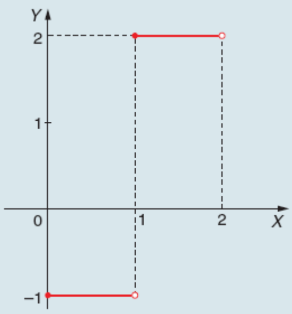
$$f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x^2}\right) \qquad g(x) = \frac{\ln(2-x)}{x+2}$$

18. La figura adjunta representa la gráfica de una función $y = f(x)$ en el intervalo $[0, 2)$. Dibuja la gráfica de dicha función en el intervalo $[-2, 2)$ y determina su expresión analítica en cada uno de los siguientes casos:

a) f es periódica de período 2.

b) f es par.

c) f es impar.



19. Prueba que la función $f(x) = \dfrac{x^2 + |x|}{x}$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}^-$.

20. Un establecimiento de hostelería abre sus puertas a las 9 de la noche, sin ningún cliente, y las cierra cuando todos se han marchado. Se supone que la función que representa el número de clientes, C, en función del número de horas que lleva abierto el establecimiento, h, es: $C = 80h - 10h^2$.

a) Determina el número máximo de clientes que van una determinada noche al establecimiento.

b) Si deseamos ir cuando haya menos de 150 personas y más de 70, ¿entre qué horas debemos hacerlo?

c) Si deseamos ir cuando haya menos de 150 personas y más de 70 y, además, queremos que durante nuestra estancia disminuya el número de clientes, ¿entre qué horas debemos ir?

d) ¿A qué hora cierra el establecimiento?

21. Prueba que la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$ está acotada por 0 y 1.

22. ¿Para qué valores de a la función $f(x) = x^3 + ax$ es estrictamente creciente en todo su dominio de definición?

23. Dibuja, si es posible, la gráfica de una función f que verifique $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$ y que alcance en $x = 1$ y $x = 3$ sendos máximos relativos y en $x = 2$ un mínimo relativo.

24. La función $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ tiene un máximo relativo en el punto de abscisa e. Demuestra que se verifica: $x^e < e^x$ en un entorno reducido de e.

16. La solución es:

a) $\left||x|-1\right| = \begin{cases} |x|-1 \text{ si } |x|-1 \geq 0 \\ -[|x|-1] \text{ si } |x|-1 < 0 \end{cases} =$

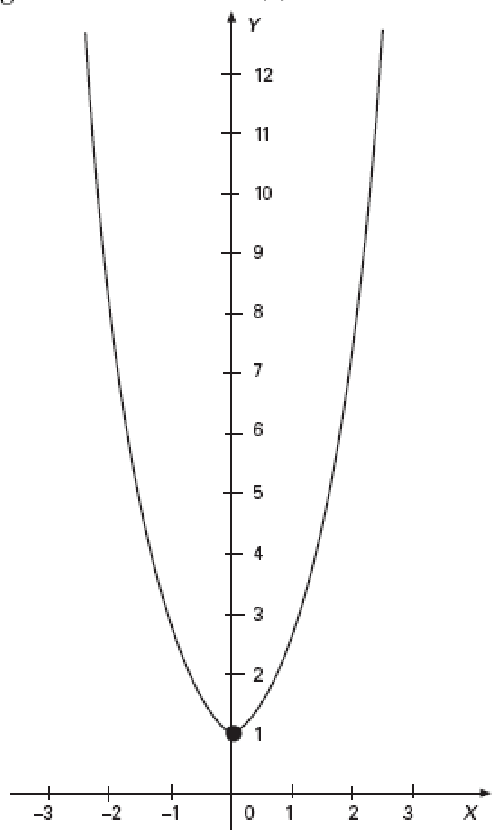
$= \begin{cases} x-1 & \text{si } x \geq 1 \\ -x-1 & \text{si } x \leq -1 \\ -x+1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ x+1 & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}$

$\left|x^2+2|x|\right| = x^2+2|x| = \begin{cases} x^2+2x \text{ si } x \geq 0 \\ x^2-2x \text{ si } x < 0 \end{cases}$

$f(x) = \left||x|-1\right| + \left|x^2+2|x|\right| =$

$= \begin{cases} x^2-3x-1 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2-x+1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ x^2+x+1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x^2+3x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

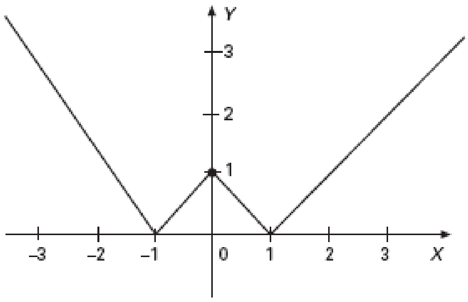
La gráfica de la función $f(x)$ es:



b) la función $g(x) = \dfrac{|x^2 - 1|}{|x| + 1}$ puede expresarse en la forma:

$$g(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x < -1 \\ x + 1 & \text{si } -1 \le x < 0 \\ -x + 1 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

La grafica de la función anterior es:



17. Queda:

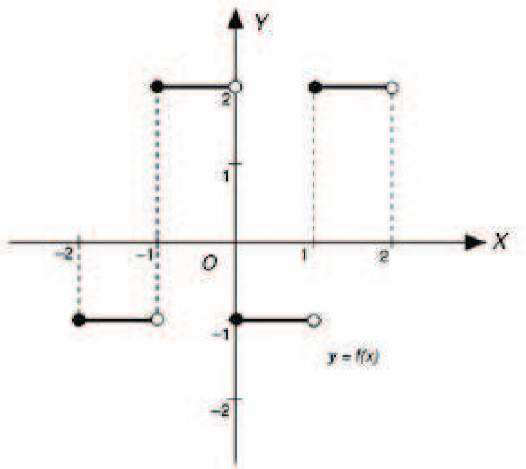
$$\text{Dom } f = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x+2}{x^2} > 0 \right\} = (-2, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$\text{Dom } g = \{ x \in \mathbb{R} \mid 2 - x > 0 \quad \text{y} \quad x \ne -2 \}$$

$$= (-\infty, -2) \cup (-2, 2)$$

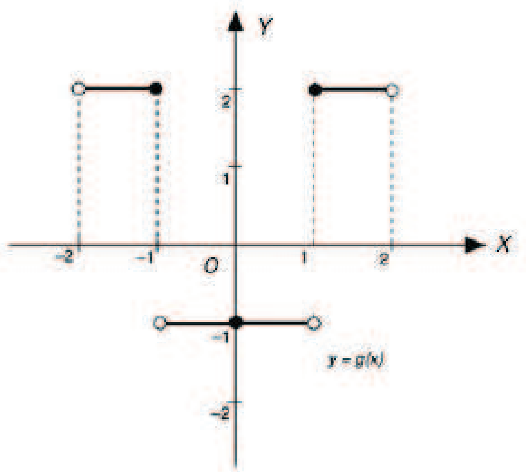
18. Quedan:

a)



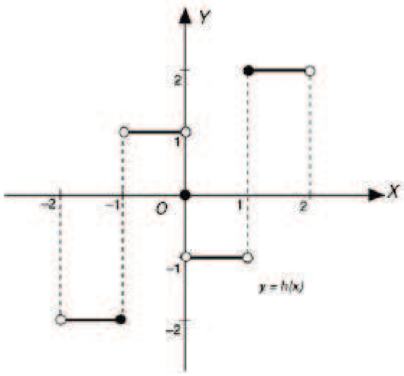
$$f(x)=\begin{cases}-1 & \text{si } 0\le x<1 \text{ o } -2\le x<-1\\ 2 & \text{si } 1\le x<2 \text{ o } -1\le x<0\end{cases}$$

b)



$$g(x)=\begin{cases}-1 & \text{si } -1<x<1\\ 2 & \text{si } -2<x\le -1 \text{ o } 1\le x<2\end{cases}$$

c)



$$h(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } -2 < x \le -1 \\ 1 & \text{si } -1 < x \le 0 \\ -1 & \text{si } -0 \le x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \le x < 2 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

19. Si $x < 0$ la función puede expresarse como $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x} = x - 1$

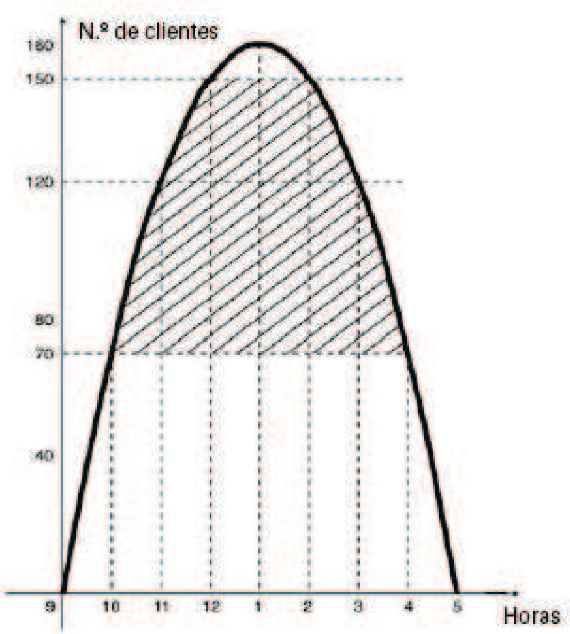
Estudiamos el signo del cociente:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2 - 1) - (x_1 - 1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} = 1 > 0.$$

Luego la función es estrictamente creciente en $\mathbb{R}^3$

20. $C = 80h - 10h^2$ C = numero de clientes; h = numero de horas a partir de 9

Hacemos un grafico que ilustre la situación:



a) El número máximo de clientes es de 160.

b) $70 < 80h - 10h^2 < 150 \Rightarrow \begin{cases} 10h^2 - 80h + 70 < 0 \quad y \\ 10h^2 - 80h + 150 > 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \left. \begin{cases} h \in (1,7) \\ h \in (-\infty, 3) \cup (5, +\infty) \end{cases} \right\} \Rightarrow h \in (1, 3) \cup (5, 7)$$

Hay que ir entre las 10 y las 12 de la noche o bien entre las 2 y las 4 de la madrugada. Corresponde a la zona rayada de la grafica.

c) Debemos ir entre las 2 y las 4 de la madrugada. Corresponde a la zona de la derecha, dentro de la zona rayada.

d) El establecimiento cierra a las 5 de la madrugada.

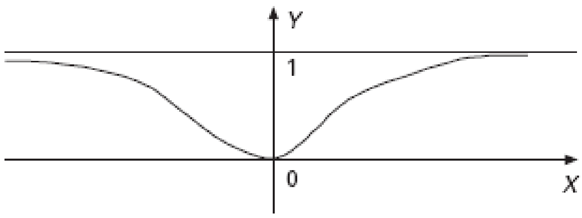
21. Veamos que $0 < \dfrac{x^2}{x^2+1} < 1 \ \forall\, x \in t$

Por un lado tenemos que $\dfrac{x^2}{x^2+1} < 0$ al ser las expresiones del numerador y del denominador siempre positivas.

De igual forma la función dada es menor que 1 al cumplirse:

$\dfrac{x^2}{x^2+1} < 1 \ \Leftrightarrow x^2 < x^2+1 \Leftrightarrow 0 < 1$

Puede observarse la acotación en la grafica



22. f es estrictamente creciente si siendo

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) < 0$

$f(x_1) = {x_1}^3 + ax_1$

$f(x_2) = {x_2}^3 + ax_2$

$\Rightarrow f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 + ax_1 - (x_2^3 + ax_2) = (x_1^3 - x_2^3) + a\,(x_1 - x_2)$

$(x_1^3 - x_2^3) + a\,(x_1 - x_2) < 0$

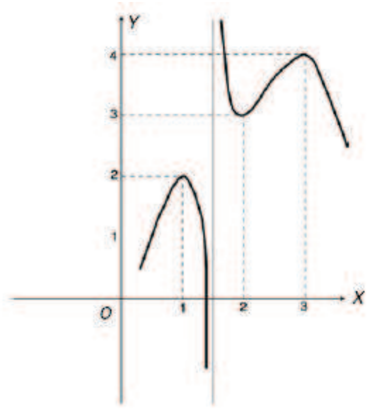
$(x_1 - x_2)\,(x_1^2 + x_2\,x_1 + x_2^2 + a) < 0 \qquad (1)$

Como $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 < 0$. La igualdad (1) será cierta si $x_1^2 + x_2\,x_1 + x_2^2 + a > 0$

$\Rightarrow \boxed{a > 0}$, pues como $x_1 < x_2$, entonces

${x_1}^2 + x_2\,x_1 + {x_2}^2 > 0 \Rightarrow$ queda $\underline{a > 0}$.

23. La solución es:



24. La función $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ tiene un máximo relativo en el punto $p(e,f(e))=\left(e,\dfrac{1}{e}\right)$. Luego

$$\frac{\ln x}{x}<\frac{1}{e}\Rightarrow e\ln x<x\Rightarrow \ln x^{e}<x\Rightarrow \boxed{x^{e}<e^{x}}\ \forall x\in E(e,\varepsilon)$$