Unidad 10 – Continuidad de las funciones

PÁGINA 235

cuestiones iniciales

1. Representa gráficamente la siguiente función y estudia su continuidad en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x \le 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

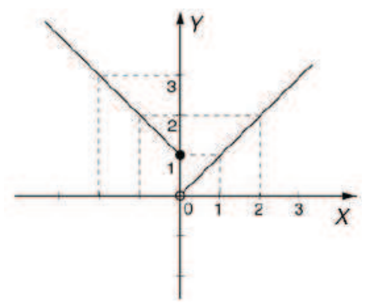
2. ¿Puedes definir la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x-1}$ en algún punto de modo que f sea continua en todo $\mathbb{R}$?

3. Estudia la continuidad de la siguiente función definida a trozos

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \le 0 \\ 1-x^2 & \text{si } 0 < x \le 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

SOLUCIONES

1. La solución queda del siguiente modo:



$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -x + 1 = 1 = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0 \neq f(0)$$

En $x = 0$ la función no es continua.

2. La solución es:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - x}{x - 1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 1^-} \frac{x\,(x-1)}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - x}{x - 1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 1^+} \frac{x\,(x-1)}{x-1} = 1$$

No es continua en $x=1$, pues no está definida. Evitaremos la discontinuidad, definiéndola:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

3. La continuidad queda:

Estudiamos la continuidad en $x = 0$ y $x = 1$.

- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^x = 1$

  $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (1 - x^2) = 1$

  $f(0) = e^0 = 1$

Luego existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$, por tanto esta función es continua en $x = 0$.

- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (1 - x^2) = 0$

  $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x = 1$

  $f(1) = 1 - 1^2 = 0$

Por tanto esta función no es continua en $x = 1$ por no coincidir los dos límites laterales.

PÁGINA 249

ACTIVIDADES

■ Utiliza los conceptos asociados a los teoremas en la resolución de los siguientes problemas:

1. **Teoremas.** A partir del siguiente enunciado, que es un teorema directo, enuncia el recíproco, el contrario y el contrarrecíproco:

   «La suma de dos números naturales impares es un número par.»

2. **Desigualdad.** Demuestra que si a y b son dos números reales positivos, entonces se verifica la siguiente desigualdad:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$$

SOLUCIONES

1. La solución queda:

Directo: Si sumamos dos números impares entonces, obtenemos un número par.
Este resultado es verdadero: $(2n+1)+(2m+1)=2(n+m+1)$ que es un número par

Recíproco: Si obtenemos un número par, entonces, sumamos dos números impares.
Este resultado es falso. Podemos obtener un número par de la suma de dos pares.

Contrario: Si no sumamos dos números impares, entonces, no obtenemos un número par.
Este resultado es falso. De la suma de dos números pares se obtiene un número par.

Contrarecíproco: Si no obtenemos un número par, entonces, no sumamos dos números impares.
Este resultado es verdadero. Si no obtenemos un número par, estamos obteniendo un número impar. Este resultado proviene de sumar un número impar y otro número par; por tanto, no sumamos dos números impares.

2. La solución es:

Como en la hipótesis nos dicen que a y b son dos números reales positivos, podríamos decir $m=\sqrt{a}$ y $n=\sqrt{b}$; así la desigualdad dada quedaría de la forma:

$\frac{2}{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}} \leq m\cdot n$ Operando en esta desigualdad obtenemos $\frac{2m^2n^2}{m^2+n^2} \leq m\cdot n$ o lo que es lo mismo, vamos a demostrar que $m\cdot n-\frac{2m^2n^2}{m^2+n^2} \geq 0$.

Operando, convenientemente, en la primera expresión obtenemos:

$m\cdot n\left[\frac{m^2+n^2-2mn}{m^2+n^2}\right]=m\cdot n\frac{(m-n)^2}{m^2+n^2}$ y como m y n son números reales positivos queda probado que esta expresión es mayor o igual que cero que es lo que queríamos demostrar.

PÁGINA 254

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases}5-\dfrac{|x|}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 5 & \text{si } x=0\end{cases}$

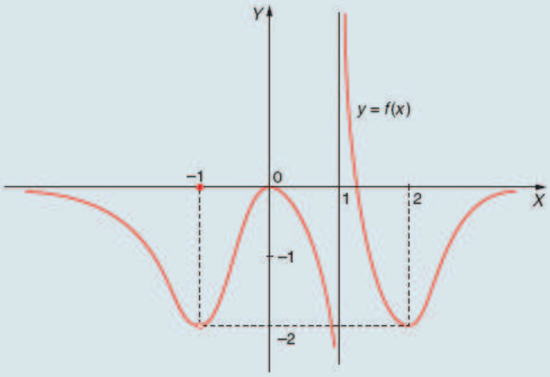
b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{si } x<>3\ (x\neq 3)\\ 6 & \text{si } x=3\end{cases}$

2. Calcula k, en cada caso, de modo que las siguientes funciones sean continuas en todo $\mathbb{R}$.

a) $f(x)=\begin{cases}\text{sen}(3x) & \text{si } x\leq \dfrac{\pi}{2}\\ 2k+\cos(2x) & \text{si } x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}1+|x| & \text{si } x<0\\ k & \text{si } x=0\\ \dfrac{3}{2}x+1 & \text{si } x>0\end{cases}$

3. Estudia la continuidad de la función $y = f(x)$, representada en la gráfica, en los puntos de abscisa $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$. Si existiesen puntos de discontinuidad, indica el tipo. Determina el dominio, recorrido, máximos y mínimos absolutos y relativos, si los hubiera, y asíntotas.



4. Halla el valor de a para el cual la función f dada por $(ax-3)$ si $x<4$ y por $(-x^2+10x-13)$ si $x\geq 4$, es continua.

5. Halla en el dominio y estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=|x^2-6x+5|$

b) $f(x)=\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}$

c) $f(x)=\ln(x^2-3x)$

6. Determina los parámetros a y b para que las funciones que siguen sean continuas en su dominio de definición:

a) $f(x)=\begin{cases}xe^{x^2} & \text{si } x\leq 0\\ ax+b & \text{si } 0<x<1\\ 1+x\ln x & \text{si } x\geq 1\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}1+\cos x & \text{si } x\leq 0\\ 2(a+x) & \text{si } 0<x<1\\ b/x^2 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$

7. Halla los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones y clasifícalos:

a) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$

b) $f(x)=\begin{cases}e^x & \text{si } x\leq 0\\ 1-x^2 & \text{si } 0<x<1\\ x & \text{si } x\geq 1\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}2-x & \text{si } x\leq 0\\ e^{-x} & \text{si } x>0\end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases}\ln(-x) & \text{si } x<-2\\ \text{sen}(\pi x) & \text{si } -2\leq x\leq 2\\ 0 & \text{si } 2<x<4\\ x^2-12 & \text{si } x\geq 4\end{cases}$

8. Halla el valor de a para el cual la función $f(x)=\dfrac{x^2+x+a}{x^2+3x-4}$ tenga una discontinuidad evitable en $x = 1$.

SOLUCIONES

1. La continuidad queda:

a) La continuidad en $x=0$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 5 - \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} 5 - \frac{(-x)}{x} = 6$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 5 - \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} 5 - \frac{x}{x} = 4$$

$f(0) = 5$

No es continua en ese punto al no coincidir los límites laterales.

b) La continuidad en $x=3$.

$$\lim_{x\to 3^-} h(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-9}{x-3} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 3^-} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} (x+3) = 6$$

$$\lim_{x\to 3^+} h(x) = \lim_{x\to 3^+} (x+3) = 6$$

$h(3) = 6$

$h(x)$ es continua en toda la recta real.

2. La solución queda:

a) La continuidad en $x=\frac{\pi}{2}$.

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} f(x) = \lim_{x\to(\pi/2)^-} sen\,(3x) = sen\,\frac{3\pi}{2} = -1$$

$$\lim_{x\to(\pi/2)^+} f(x) = \lim_{x\to(\pi/2)^+} [2k + \cos(2x)] = 2k + \cos\pi = 2k-1$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = sen\,\frac{3\pi}{2} = -1$$

$f(x)$ es continua en $x = \frac{\pi}{2}$ si $2k-1 = -1 \Rightarrow k = 0$.

Para $k = 0 \Rightarrow f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

b) La continuidad en $x=0$.

$$\lim_{x \to 0^-} h(x) = \lim_{x \to 0^-} 1 + |x| = \lim_{x \to 0^-} 1 - x = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^+} (3/2\ x + 1) = 1$$

$h(0) = k$.

$h(x)$ es continua en $x = 0$ si $k = 1$.

Para $k = 1$, la función $h(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

3. La solución es.

- En $x=-1$, la $f(x)$ tiene un punto de discontinuidad evitable.
- En $x=1$, la $f(x)$ tiene un punto de discontinuidad no evitable de salto finito.
- En $x=2$, la $f(x)$ es continua.
- $\mathrm{Dom}\, f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
- $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}$.
- No tiene ni máximos ni mínimos absolutos.
- Tiene dos mínimos relativos en los puntos $(-1,-2)$ y $(2,-2)$, y un máximo relativo en el punto $(0,0)$.
- Asíntota vertical: $x=1$.
  Asíntota horizontal: $y=0$.

4. La solución es:

$$f(x) = \begin{cases} ax - 3 & \text{si } x < 4 \\ -x^2 + 10x - 13 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

La función $f(x)$ es continua en todos los números reales, excepto en $x=4$. Veamos qué ocurre en $x=4$.

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} ax - 3 = 4a - 3$$

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} -x^2 + 10x - 13 = 11$$

$$f(4) = 11$$

Para que esta función sea continua en $x=4$ se debe cumplir:

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^+} f(x) = f(4)$$

Por tanto, $4a - 3 = 11 \Rightarrow \frac{7}{2} = a$

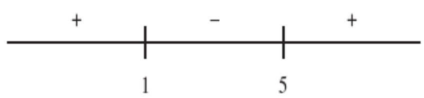
5. En cada uno de los casos:

a) $Dom\, f = \mathbb{R}$

$f(x) = |x^2 - 6x + 5| =$

$$= \begin{cases} x^2 - 6x + 5 & \text{si } x^2 - 6x + 5 \geq 0 \\ -(x^2 - 6x + 5) & \text{si } x^2 - 6x + 5 < 0 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de $(x^2 - 6x + 5)$. Los ceros de la función son $x=1$ y $x=5$.



Luego:

$x^2 - 6x + 5 \geq 0$ si $x \leq 1$ o $x \geq 5$

$x^2 - 6x + 5 < 0$ si $1 < x < 5$.

Por tanto:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 5 & \text{si } x \leq 1 \text{ o } x \geq 5 \\ -x^2 + 6x - 5 & \text{si } 1 < x < 5 \end{cases}$$

Estudiamos la continuidad de $f(x)$ en $x = 1$ y $x = 5$.

- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 - 6x + 5) = 0 = f(1)$

  $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (-x^2 + 6x - 5) = 0 = f(1)$

  Luego $f(x)$ es continua en $x = 1$.

- $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^-} (-x^2 + 6x - 5) = 0 = f(5)$

  $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^+} (x^2 - 6x + 5) = 0 = f(5)$

  Luego $f(x)$ es continua en $x = 5$.

Por tanto, la función $f(x)$ es continua en toda la recta real.

b) $Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} / 4 + x \geq 0 \text{ y } 4 - x \geq 0\}$

Resolvemos el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 4 + x \geq 0 \\ 4 - x \leq 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \quad x \geq -4 \\ \Rightarrow \quad x \leq 4 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l} a \\ b \end{array}}\right\} \Rightarrow \text{Solución } [-4, 4]$$

$Dom\, f = \{x \in [-4, 4]\} = [-4, 4]$

La función $f(x)$ es continua en todos los puntos de su dominio. Es decir, es continua $\forall\, x \in [-4, 4]$

c) $Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 3x > 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x < 0 \text{ o } x > 3\}$

La función $f(x)$ es continua en $\forall\, x \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

6. En cada caso queda del siguiente modo:

a) Estudiamos la continuidad en $x = 0$ y $x = 1$. Obtenemos:

$\lim\limits_{x \to 0^-} xe^{x^2} = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0^+} ax + b = b$

$\lim\limits_{x \to 1^-} ax + b = a + b$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 1^+} 1 + x \cdot \ln x = 1$

Para que la función sea continua tiene que ser $a = 1$ y $b = 0$.

b) Procedemos como en el caso anterior:

$$\lim_{x \to 0^-} (1 + \cos x) = 2 \qquad \lim_{x \to 0^+} 2\,(a + x) = 2a$$

$$\lim_{x \to 1^-} 2\,(a + x) = 2a + 2 \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{b}{x^2} = b$$

Los valores buscados son $a = 1$ y $b = 4$.

7. En cada caso queda:

a) Esta función tiene dos puntos de discontinuidad en los ceros del denominador $x=0$ y $x=2$.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} \to -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} \to +\infty$$

En $x=0$ la función tiene un punto de discontinuidad no evitable de salto infinito.

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 2^-} \frac{(x + 2)}{x} = 2$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 2^+} \frac{(x + 2)}{x} = 2$$

En $x=2$ la función tiene un punto de discontinuidad evitable.

b) En $x=1$ la función tiene una discontinuidad no evitable de salto finito, al cumplirse:

$$\lim_{x \to 1^-} (1 - x^2) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1^+} x = 1$$

c) En $x=0$ la función tiene una discontinuidad no evitable de salto finito, al cumplirse:

$$\lim_{x \to 0^-} (2 - x) = 2 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^+} e^{-x} = 1$$

d) Veamos la continuidad en $x=-2$, $x=2$ y $x=4$.

- $\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} \ln(-x) = \ln 2 \neq f(-2)$

  $\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \operatorname{sen}(\pi x) = \operatorname{sen}(-2\pi) = 0 = f(-2)$

La función no es continua en $x=-2$.

- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \text{sen}(\pi x) = \text{sen}(2\pi) = 0 = f(2)$

  $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} 0 = f(2)$

  La función es continua en $x = 2$.

- $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} 0 \neq f(4)$

  $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} x^2 - 12 = 4 = f(4)$

  La función es no continua en $x = 4$.

  Los puntos de discontinuidad son $x = -2$ y $x = 4$.

8. La solución queda:

   a debe valer -2, puesto que:

   $$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 + x + a}{x^2 + 3x - 4} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x - 4} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$
   $$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1^-} \frac{(x+2)}{(x+4)} = \frac{3}{5}$$

   $$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 + x + a}{x^2 + 3x - 4} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x - 4} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$
   $$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{(x+2)}{(x+4)} = \frac{3}{5}$$

   Para $a = -2$ la función tiene en $x = 1$ un punto de discontinuidad evitable.

PÁGINA 255

9. Si f es continua en $x = 2$ y $f(2) < 0$, ¿existe un entorno de 2 en el cual $f(x)$ es negativa?

10. Estudia si las siguientes funciones verifican el teorema de Bolzano en los intervalos indicados en cada una de ellas:
a) $f(x) = x^2 - e^x + 2$ en $[1, 2]$.
b) $f(x) = x - \ln x - 3$ en $[1, 3]$.

11. Analiza si las siguientes ecuaciones tienen soluciones en los intervalos dados:
a) $x^3 - 8x^2 + 3 = 0$ en $[-1, 0]$.
b) $x = x \operatorname{sen} x + \cos x$ en $[-\pi, \pi]$.

12. ¿Existe un número real para el cual la igualdad $3 \operatorname{sen} x = e^{-x} \cos x$ es cierta?

13. Demuestra que la función $f(x) = x^3 - 8x + 2$ corta al eje de abscisas en el intervalo $(0, 2)$. ¿Puedes decir lo mismo de la función $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-1}$?

14. Sea f una función que cumple $f(-2) \leq 0$, $f(0) > 0$. ¿Es siempre cierto que $\exists c \in (-2, 0)$ tal que $f(c) = 0$?

15. Para la función $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$ se tiene que $f(-3) = 4$ y $f(-1) = -2$; pero la gráfica de f no corta al eje de abscisas en el intervalo $[-3, -1]$. Razona si esto contradice el teorema de Bolzano.

16. Las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 + x^2$ y $g(x) = 3 + \cos \pi x$, ¿se cortan en algún punto?

17. Calcula el valor de a para que se pueda aplicar el teorema de Bolzano, en el intervalo $[-1, 1]$, a la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 2 & \text{si } x < 0 \\ e^{2x} + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

18. Prueba que la función $f(x) = e^x - 1$ toma todos los valores del intervalo $[0, e - 1]$.

19. Sea la función $f(x) = x^3 - 1$. ¿Se puede afirmar que la función toma todos los valores del intervalo $[0, 7]$? ¿Está acotada en este intervalo?

20. ¿Es continua la función $f(x) = \dfrac{4}{x}$ en el intervalo $[0, 3]$? ¿Y en el intervalo $[1, 3]$? ¿Está acotada en estos intervalos?

21. Sea la función $f: [-1, 3] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x^2 - 4|$. ¿Es continua en el intervalo $[-1, 3]$? Enuncia un teorema en virtud del cual se pueda afirmar que f alcanza sus extremos absolutos en el intervalo $[-1, 3]$.

22. La función $f(x) = \operatorname{tg} x$ no tiene máximo absoluto en $[0, \pi]$. ¿Contradice este hecho el teorema de Weierstrass?

23. ¿Se puede afirmar que la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x-3}$ está acotada en el intervalo $[0, 2]$? ¿Y en el intervalo $[-2, 0]$?

9. Por el teorema de conservación del signo como $f(x)$ es continua en $x=2$ y $f(2)\neq 0$ existe un entorno de 2 en el cual el signo de $f(x)$ es el mismo que en $f(2)$, en este caso negativo.

10. La solución queda:

    a) La función $f(x)=x^2-e^x+2$ es continua en el intervalo [1, 2] y además f(1) >0 y f(2) < 0 es decir verifica las hipótesis del teorema de Bolzano. Por tanto $\exists c\in(1,2)$ de modo que $f(c)=0$.

    b) La función $f(x)=x-\ln x-3$ es continua en el intervalo [1, 3] y además f(1) <0 y f(3) < 0 es decir no verifica las hipótesis del teorema de Bolzano. Por tanto no podemos asegurar que exista un valor que anule la función en el intervalo dado.

11. La solución queda:

    a) La función $f(x)=x^3-8x^2+3$ es continua en el intervalo [-1, 0] y además f(-1) <0 y f(0) > 0 es decir verifica las hipótesis del teorema de Bolzano. Por tanto $\exists c\in(-1,0)$ de modo que $f(c)=0$, es decir la ecuación dada tiene solución en ese intervalo.

    b) La función $f(x)=x-x\operatorname{sen}x-\cos x$ es continua en el intervalo $[-\pi,\pi]$ y además f($-\pi$) <0 y f(π) > 0 es decir verifica las hipótesis del teorema de Bolzano. Por tanto podemos asegurar que exista un valor solución de la ecuación en el intervalo dado.

12. Para demostrar que la igualdad es cierta hay que probar que la siguiente función $f(x)=3\operatorname{sen}x-e^{-x}\cos x$ verifica el teorema de Bolzano.

    1.º $f(x)$ es continua en $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$.

    2.º $f(0)=-1<0$ y $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=3>0$, es decir signo $f(0)\neq$

    $\neq$ signo $f\left(\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow f(x)$ cumple Bolzano en $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$,

    luego $\exists\ c\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$, tal que $f(c)=0$.

13. La solución es:

    $f(x)$ es continua en $[0,2]$ y además $f(0)=2$ y $f(2)=-6$, es decir, signo $f(0)\neq$ signo $f(2)$, por tanto la función verifica el teorema de Bolzano, luego $\exists c\in(0,2)/c^3-8c+2=0$, es decir, corta al eje de abscisas.

No podemos decir lo mismo de $f(x)=\dfrac{2x-3}{x-1}$, puesto que esta función no es continua en el punto $x=1$; luego no es continua en $[0,2]$, por lo que no se puede aplicar el teorema de Bolzano.

14. La solución es:

Para que sea cierto que $\exists\, c \in (-2,0) / f(x)=0$, la función debe verificar el teorema de Bolzano que es el que nos garantiza que exista esta solución. La función dada no verifica las hipótesis del teorema por lo que no podemos decir nada de su continuidad en $[-2,0]$.

15. La solución queda:

No contradice el teorema al no ser continua la función en el intervalo $[-3,-1]$.

La función presenta en $x=-2$ una discontinuidad no evitable con salto infinito.

16. La solución queda:

La función $h(x)=f(x)-g(x)$, es decir, $h(x)=x^3+x^2-3-\cos(\pi x)$ cumple las hipótesis del teorema de Bolzano en el intervalo $[0,-2]$.

La tesis del teorema permite probar que efectivamente existe algún valor en $(0,2)$ en el cual las funciones se cortan.

17. La solución queda:

Estudiemos si la función es continua en el intervalo [-1, 1] y para ello estudiamos la continuidad en $x=0$ que es donde cambia de definición pues en el resto es continua:

$$f(0)=2 \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+}\left(e^{2x}+1\right)=2 \quad ; \quad \lim_{x\to 0^-}\left(x^2+ax+2\right)=2$$

Es decir la función es continua en el intervalo dado. Además f(-1) = 3 – a < 0 y f(1) > 0 . Por tanto para que la función verifique las hipótesis del teorema de Bolzano se debe verificar que a < 3.

18. La solución queda:

Vamos a aplicar el teorema de Darboux.

$$e^x-1=0 \;\Rightarrow\; x=0 \qquad ; \quad e^x-1=e-1 \;\Rightarrow\; x=1$$

La función dada es continua en el intervalo [0, 1] luego aplicando el teorema indicado podemos afirmar que alcanza todos los valores del intervalo [f(0), f(1)] = [0, e – 1].

19. Se cumple:

$$x^3 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

$$x^3 - 1 = 7 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 8 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

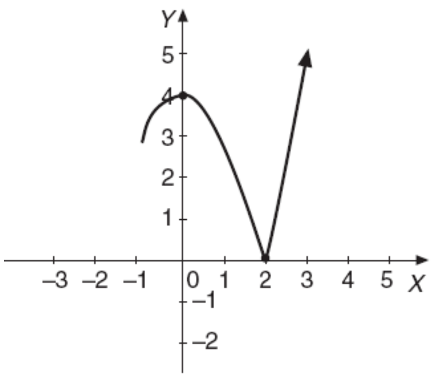
Por el teorema de Darboux o de los valores intermedios si $x \in [1,2]$ entonces $f(x)$ recorre los valores del intervalo $[0,7]$.

Por el teorema de la acotación en un intervalo cerrado, la función $f(x) = x^3 - 1$, que es continua, está acotada en $[1,2]$.

20. La solución es:

La función $f(x) = \frac{4}{x}$ no es continua en $[0,3]$, puesto que no es continua en $x = 0$. La función $f(x) = \frac{4}{x}$ sí es continua en $[1,3]$, por lo que podemos asegurar, por el teorema de acotación en un intervalo cerrado, que $f(x)$ está acotada en $[1,3]$.

21. La solución queda del siguiente modo:



La función $f(x)$ está definida por:

$$\begin{cases} -x^2 + 4 & \text{si } -1 \le x \le 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } 2 < x \le 3 \end{cases}$$

Por el teorema de Weierstrass la función alcanza sus extremos absolutos en $[-1,3]$. Puede observarse que el mínimo absoluto es 0 y el máximo absoluto es 5.

22. La solución es:

No contradice el teorema de Weierstrass, puesto que $f(x) = \operatorname{tg} x$ no es continua en $x = \frac{\pi}{2}$; por tanto, no es continua en $[0, \pi]$. Debido a esto, a $f(x)$ no se le puede aplicar el teorema de Weierstrass.

23. La solución queda:

La función dada no es continua en $x = 1$, por tanto no es continua en el intervalo [0,2], de donde no podemos afirmar que este acotada. En cambio si es continua en el intervalo [-2, 0] por tanto podemos afirmar que en ese intervalo esta acotada.

PÁGINA 256

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

24. Dadas las funciones f y g definidas en $\mathbb{R}$ por:

$$f(x)=\frac{x+|x|}{2} \qquad g(x)=\begin{cases} x & \text{si } x<0 \\ x^2 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

estudia la continuidad de la función $g \circ f$.

25. Demuestra que las gráficas de las funciones $f(x)=e^x$ y $g(x)=\frac{1}{x}$ se cortan en algún punto de abscisa positiva.

26. Dada la función $f(x)=2x^3+1$, prueba que existe un valor c perteneciente al intervalo $(0, 2)$ de manera que $f(c)=\frac{13}{4}$.

27. La función $f(x)=\frac{x^2-a}{x^3+x^2+ax+12}$ presenta una discontinuidad evitable en $x=-2$, ¿para qué valor de a?

28. Estudia el dominio y la discontinuidad de la función:

$$f(x)=\ln\left[\frac{x+2}{x^2}\right]$$

29. Si g es una función polinómica, ¿qué puedes afirmar sobre la continuidad de la función $f(x)=\frac{g(x)}{x^3-x}$?

30. Halla a y b para que se pueda aplicar el teorema de Bolzano a la función f y halla el punto $c \in (-\pi, \pi)$ al que hace mención el teorema:

$$f(x)=\begin{cases} \cos x & \text{si } -\pi \leq x \leq 0 \\ a+x^2 & \text{si } 0<x<1 \\ \frac{b}{x} & \text{si } 1\leq x\leq \pi \end{cases}$$

31. La función f se define en $[-1, 1]$ del siguiente modo: vale -1 si $x \leq 0$ y vale $2x^3-1$ si $x>0$. Explica si f verifica el teorema de Bolzano.

32. Sea la función $f(x)=x^2+1$. Haciendo uso del teorema necesario, cuyo enunciado debes escribir, analiza si dicha función toma todos los valores del intervalo $[1, 5]$.

33. Demuestra que la ecuación $\pi^x=e$ tiene solución en $(0, 1)$. ¿Lo cumple también la ecuación $\phi^X=e$, siendo ϕ el número de oro?

34. Sea la función $f(x)=\begin{cases} -x^2+1 & \text{si } 0\leq x\leq 2 \\ x-1 & \text{si } 2<x\leq 3 \end{cases}$, ¿es continua? Prueba que existe $c \in [0, 3]$ tal que $f(c)=0$. ¿Contradice el teorema de Bolzano?

35. ¿La función $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ alcanza máximo y mínimo absolutos en el intervalo $[-1, 1]$? En caso afirmativo hállalos.

24. La solución es:

La función $f(x)$ es $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

La función $g \circ f$ es:

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Esta función es continua para cualquier número real.

25. La solución queda:

Veamos si la función $h(x) = e^x - \frac{1}{x}$ verifica las hipótesis del teorema de Bolzano en algún intervalo que hemos de buscar. Vemos que la función h(x) dada es continua en el intervalo [0,5; 1] y además h(0,5)<0 y h(1) > 0 por tanto aplicando el teorema mencionado podemos decir que existe un valor en el intervalo (0,5 ; 1) en el cual la función se anula es decir que $f(x) = g(x)$.

26. La solución es:

Veamos si la función $h(x) = f(x) - \frac{13}{4} = 2x^3 - \frac{9}{4}$ verifica las hipótesis del teorema de Bolzano en el intervalo (0,2) .La función h(x) dada es continua en el intervalo (0, 2) y además h(0)<0 y h(2) > 0 por tanto aplicando el teorema mencionado podemos decir que existe un valor en el intervalo (0 ,2) en el cual la función se anula es decir $h(x) = 0$; $f(x) = \frac{13}{4}$.

27. La solución queda:

Para $a = 4$, puesto que:

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{x^2 - 4}{x^3 + x^2 + 4x + 12} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to -2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(x^2 - x + 6)} = \lim_{x \to -2^-} \frac{(x-2)}{x^2 - x + 6} =$$

$$= \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{x^2 - 4}{x^3 + x^2 + 4x + 12} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to -2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(x^2 - x + 6)} = \lim_{x \to -2^+} \frac{(x-2)}{x^2 - x + 6} = -\frac{1}{3}$$

$f(x)$ presenta una discontinuidad evitable en $x=-2$ para $a=4$.

28. La solución queda:

- $Dom\ f = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{x+2}{x^2} > 0 \text{ y } x \neq 0 \right\}$

  Por tanto, $Dom\ f = (-2, 0) \cup (0, +\infty)$.

- $f(x)$ es continua en todos los puntos de su dominio.

29. La solución es:

La $f(x)$ es discontinua en todos los ceros del denominador. En $x=0$; $x=1$; $x=-1$. En estos puntos la discontinuidad de $f(x)$ será evitable si estos valores anulan el numerador y será no evitable en aquellos que no anulan $g(x)$. Es decir, si $g(0)=0$ en $x=0$ $f(x)$ tiene un punto de discontinuidad evitable, en caso contrario sería no evitable. Con $x=1$ y $x=-1$ se haría igual.

30. La solución es:

1º Estudiemos la continuidad de $f(x)$ en $[-\pi, \pi]$.

- $\lim_{x \to -\pi^+} f(x) = \lim_{x \to -\pi^+} \cos x = \cos(-\pi) = -1 = f(\pi)$.

- $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \cos x = 1 = f(0)$

  $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} a + x^2 = a$

  $f(x)$ es continua en $x = 0$ si $a = 1$.

- $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} a + x^2 = a + 1$

  $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{b}{x} = \frac{b}{1} = b = f(1)$

  $f(x)$ es continua en $x = 1$ si $a + 1 = b$.

- $\lim\limits_{x \to \pi^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \pi^-} \dfrac{b}{x} = \dfrac{b}{\pi} = f(\pi)$

Por tanto, $f(x)$ es continua en $[-\pi, \pi]$, pues:

- $f(x)$ es continua por la derecha en $x = -\pi$
- $f(x)$ es continua por la izquierda en $x = \pi$
- $f(x)$ es continua en $(-\pi, \pi)$ si $a = 1$ y $a + 1 = b \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{a = 1;\ b = 2}$

2º $f(-\pi) = -1 < 0$ y $f(\pi) = 2/\pi > 0$, por tanto signo $f(-\pi) \neq$ signo $f(\pi)$.

La función $f(x)$ verifica las hipótesis del teorema de Bolzano para $a = 1$; $b = 2$.

El valor $c \in (-\pi, \pi)$ es $c = \dfrac{-\pi}{2}$.

31. La solución queda:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x^3 - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{en } [-1, 1]$$

Veamos si $f(x)$ verifica las hipótesis del teorema de Bolzano en $[-1,1]$. Para ello debe verificar:

1º $f(x)$ debe ser continua en $[-1,1]$. Estudiemos la continuidad de $f(x)$ en $x=0$ que es el único punto en el cual puede presentar problemas.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-1) = f(0).$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (2x^3 - 1) = -1 = f(0)$$

Como $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$ la función es continua en $x=0$ por lo que es continua en $[-1,1]$.

2º $f(-1) = -1 < 0$ y $f(1) = 1 > 0$ luego signo $f(-1) \neq$ signo $f(1)$

Por tanto, $f(x)$ verifica el teorema de bolzano en $[-1,1]$.

32. Se cumple:

$$x^2+1=1 \quad \Rightarrow \quad x^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=0$$
$$x^2+1=5 \quad \Rightarrow \quad x^2=4 \quad \Rightarrow \quad x=\pm 2$$

Por el teorema de Darboux o de los valores intermedios la función continua $f(x)=x^2+1$ toma los valores del intervalo $[1,5]$, siempre que x recorra los valores del intervalo $[-2,0]$ o $[0,2]$.

33. La solución queda:

- Para ver si la ecuación $\pi^x = e$ tiene soluciones en $(0,1)$, veamos si $f(x)=\pi^x - e$ verifica las hipótesis del teorema de Bolzano en $[0,1]$.

$f(x)$ es continua en $[0,1]$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=\pi^0-e=1-e<0 \\ f(1)=\pi^1-e=\pi-e>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{signo } f(0) \neq \text{signo } f(1)$$

Por tanto verifica Bolzano y $\exists c \in (0,1)$ tal que $f(c)=0$, es decir, $\pi^c = e$.

- Para ver si la ecuación $\phi^x = e$ hacemos el mismo estudio:

$f(x)$ es continua en $[0,1]$.

$$f(0)=\phi^0-e=1-e<0$$

$$f(1)=\phi^1-e=\phi-e=\frac{1+\sqrt{5}}{2}-e<0.$$

Como signo $f(0)$ = signo $f(1)$ no se puede aplicar el teorema y no podemos asegurar que existe una solución en $(0,1)$.

34. La solución queda:

La función $f(x)$ no es continua en $x = 2$ al cumplirse:

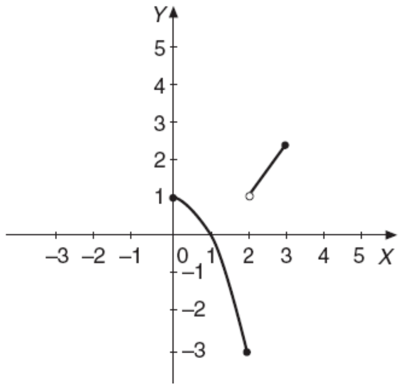
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (-x^2+1) = -3$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x-1) = 1$$

Se observa que para $c = 1 \in (0, 3)$ se cumple:

$$f(c) = f(1) = -1^2 + 1 = 0$$

Este hecho no contradice el teorema de Bolzano como puede verse en la gráfica de la función:



El que no se pueda explicar el teorema de Bolzano no quiere decir que no exista un valor en el que la función se anule, sino que no podemos explicarlo a través de dicho teorema.

35. La solución queda:

La función es continua en el intervalo dado, por tanto por el teorema de Weierstrass la función alcanza máximo y mínimo absolutos en ese intervalo.

El máximo absoluto es 1 y lo alcanza para $x=0$ y el mínimo absoluto es $\frac{1}{2}$ y lo alcanza para $x=1$ o $x=-1$.